

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

3ª Semana

1. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a) $\cos z = 2$

b) $z^{2i} - 2z^i + 2 = 0$

2. Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Sug: Use as fórmulas de Euler na relação $\sin w = z$ para determinar e^w em função de z , onde $w = \operatorname{arcsen} z$.

3. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} (1 + i2t) e^{t+it^2} dt.$$

Utilizando o resultado anterior indique o valor dos integrais:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (\cos t^2 - 2t \sin t^2) dt \quad \text{e} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (2t \cos t^2 + \sin t^2) dt$$

4. Mostre que

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{2 \cos t^2 + i2 \sin t^2 - 1} dt \right| \leq 1.$$

5. Considere o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1] \\ e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} & \text{se } t \in [1, 2] \\ i(3-t) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Usando o ramo principal do logaritmo, calcule o integral

$$\int_0^3 \gamma(t) \log \gamma(t) \gamma'(t) dt.$$

Observação: Este integral é

$$\int_C z \log z dz,$$

onde C é a curva orientada parametrizada pelo caminho $\gamma(t)$.

6. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

- a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} z^2 dz$, com $k = 1, 2$.
- b) Calcule $\int_{\gamma_k} z \bar{z} dz$ com $k = 1, 2$.
- c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

7. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

8. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - i| + |z - 2i| = 2$, percorrida no sentido positivo. Calcule

- a) $\oint_{\Gamma} z^5 e^{z^2 \cos^2 z} dz$
- b) $\oint_{\Gamma} \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2 z}}{2z - i\pi} dz$
- c) $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 (z - i)^3} dz$
- d) $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i)^{11}} dz$

9. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a circunferência $|z + i| = 1$, percorrida no sentido positivo. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^3} dz,$$

onde função $f(z)$ é uma função analítica tal que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = e^y \cos x.$$

10. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- a) Mostre que u é uma função harmónica.
- b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.
- c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - 1)^2} dz,$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.