

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

2ª Semana

1. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa:

- a) $x^2 - y^2 + i2xy$
- b) $z^3 + (2 + 5i)z^2 + z + i$
- c) ze^{z^2}
- d) $\frac{1}{z}$

2. Indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções de variável complexa possuem derivada (no sentido complexo) e calcule-a quando existe.

- a) $x^2 - y^2 + i2xy$
- b) $x^2 - y + i(x - y^2)$
- c) $|x|(x^2 - 3y^2) + i(3x^2y - y^3)$
- d) $e^{-y}(x \cos x - y \sin x) + i e^{-y}(y \cos x + x \sin x)$
- e) $\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}$
- f) $z(e^{iz} - e^{-iz})$
- g) $ze^{\bar{z}}$
- h) e^{z^2}

3. Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} (\operatorname{Re} z)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} & \text{se } \operatorname{Re} z \neq 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{com} \quad u(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad v(x, y) = 0.$$

Mostre que f possui derivada (no sentido complexo) na origem, mas que a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ não é contínua nesse ponto.

4. Mostre que $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada nesse ponto.

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.
- Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável no sentido complexo, bem como o seu domínio de analiticidade.
 - Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r' . Para que valores de r se tem $r = r'$?
6. Seja f uma função analítica que verifica, num aberto conexo D , $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$. Mostre que f é constante em D (sug.: deve mostrar que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes enquanto funções das variáveis x, y).
7. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
 - $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
 - $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
 - $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$
 - $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$
 - $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y$
8. Determine os zeros (em $\mathbb{C}$) das seguintes funções:
- $\cos z$
 - $\sin z$
 - $\operatorname{sh} z$
 - $\operatorname{ch} z$
 - $e^{iz} - e^z$
9. Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = \rho \log \rho \cos \theta - \rho \theta \sin \theta + i(\rho \log \rho \sin \theta + \rho \theta \cos \theta),$$

com $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $h'(z)$.

10. Calcule todos os valores possíveis para as seguintes expressões:
- $\log(-1)$
 - i^i
 - $(1 + i)^{1-i}$
 - 2^i