

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

1ª Semana

1. Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

- a) $\left(\frac{1}{15} + i\frac{24}{56}\right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{27}{63}i\right) + \left(\frac{31}{35} + \frac{6}{18}i\right).$
- b) $\left(\frac{1}{15} + i2\right) \left(3 - \frac{5}{2}i\right).$
- c) $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right)^3.$
- d) $(3 - 2i)^{-1}.$
- e) $\frac{\pi + ie}{1 + i2}.$
- f) i^n , com $n \in \mathbb{Z}.$

2. Verifique as seguintes identidades:

- a) $\overline{(\overline{z})} = z.$
- b) $|\overline{z}| = |z|.$
- c) $\overline{(w + z)} = \overline{w} + \overline{z}.$
- d) $\overline{(wz)} = \overline{w} \overline{z}.$

3. Mostre que

- a) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ e $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- b) $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$
- c) $|wz| = |w| |z|.$
- d) $|w + z| \leq |w| + |z|.$
- e) $||w| - |z|| \leq |w + z|.$

4. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3\}.$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 + 2i + 3e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}.$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - 2i| \leq 2\}.$
- d) $\{z \in \mathbb{C} : z = -i + (2 + i)t, \quad t \in \mathbb{R}\}.$
- e) $\operatorname{Im}\left(\frac{z - i}{z - 1}\right) = 0.$
- f) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z - i| = 4\}.$

5. Descreva os seguintes conjuntos:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = z^2\}$.
- b) $\{z \in \mathbb{C} : z^{-1} = \bar{z}\}$.
- c) $\{z \in \mathbb{C} : z = 2 + i + 2e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta < \pi\}$.
- d) $\{z \in \mathbb{C} : z = -1 - 2i + (3 + 4i)t, \quad t \in [1, +\infty[\}$.
- e) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| + |z + 3 - 2i| < 3\}$.
- f) $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| \leq |z - i|\}$.

6. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

- a) $\sqrt{2}$.
- b) -2 .
- c) $3 + i\sqrt{3}$.
- d) $(3 + i\sqrt{3})^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

7. Descreva geometricamente os números representados pela expressão $\sqrt[6]{1 - i}$.

8. Determine todas as soluções das seguintes equações e represente-as geometricamente

- a) $z^4 = 4\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}i} \left(4e^{\frac{3\pi}{2}i} + 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \right)$
- b) $z^4 + 16 = 0$
- c) $z^3 - 1 = 0$
- d) $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$

9. Utilizando a fórmula de Moivre, determine expressões para $\cos(4\phi)$ e $\sin(4\phi)$ em termos de $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$.

10. Utilizando as propriedades da exponencial complexa, deduza as conhecidas expressões para $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$ em termos de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ e $\sin(\beta)$.