

36.1 Comportamento qualitativo das soluções da Eq. do Calor

Vamos agora analisar as soluções das equações de calor que determinamos. Considere-se por exemplo a solução (32.1) do problema (P1) da 32^a aula. Começemos por notar que a solução

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

tende para a solução de equilíbrio (neste caso, uma solução de temperatura constante igual a zero). Ou seja

$$\forall x \in [0, L] \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0.$$

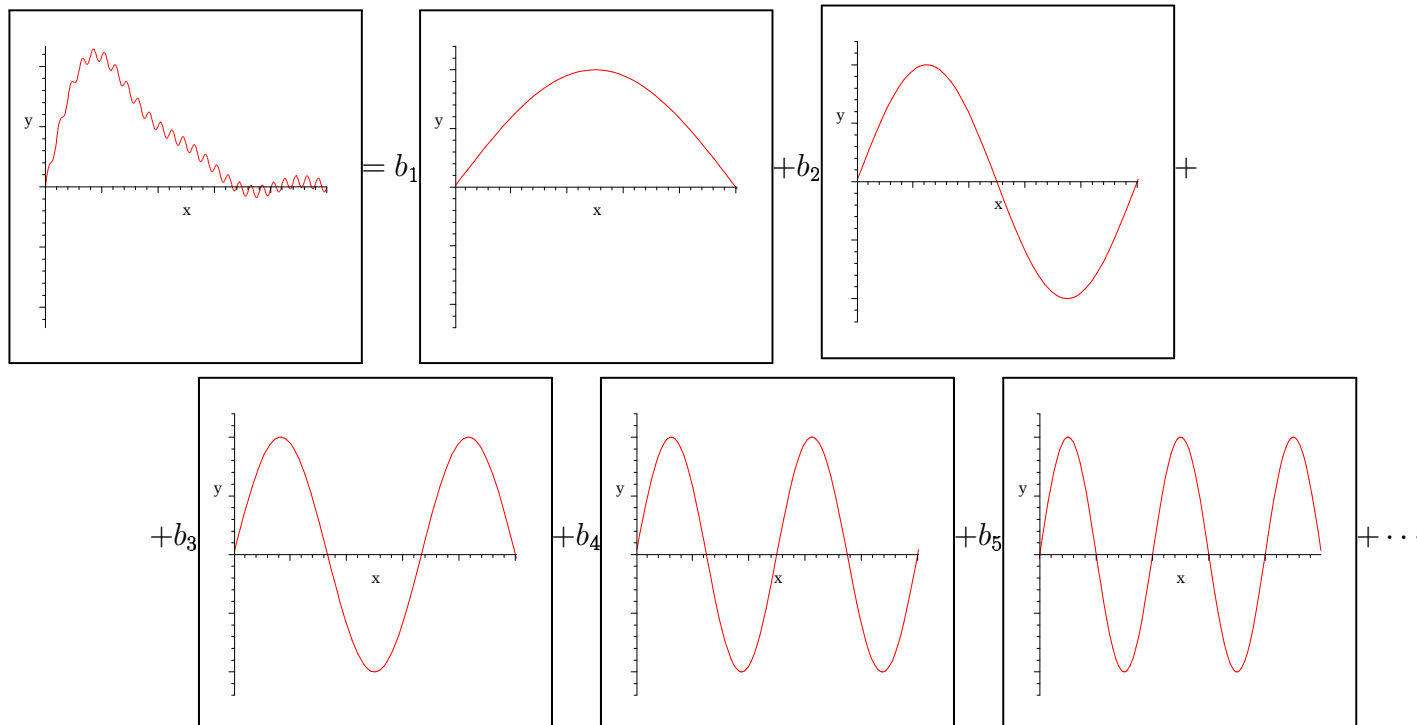
Por outro lado pode-se mostrar que, mesmo no caso em que para $t = 0$ a função $u(0, x)$ não seja muito regular (por exemplo contínua e seccionalmente monótona mas não diferenciável), $u(t, x)$ é de classe C^∞ para qualquer $t > 0$ (por mais pequeno que seja t).

Este mesmo fenómeno de regularização, operado pela evolução difusiva governada pela equação do calor, é aparente na forma da solução $u(t, x)$: atendendo a que $e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t}$ decresce exponencialmente com t e com n , passado pouco tempo (i.e. mesmo para pequenos valores de t) a solução é bem aproximada por uma soma finita de funções de pequena variação, e.g.

$$u(t, x) \approx b_1 e^{-\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + b_2 e^{-4\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

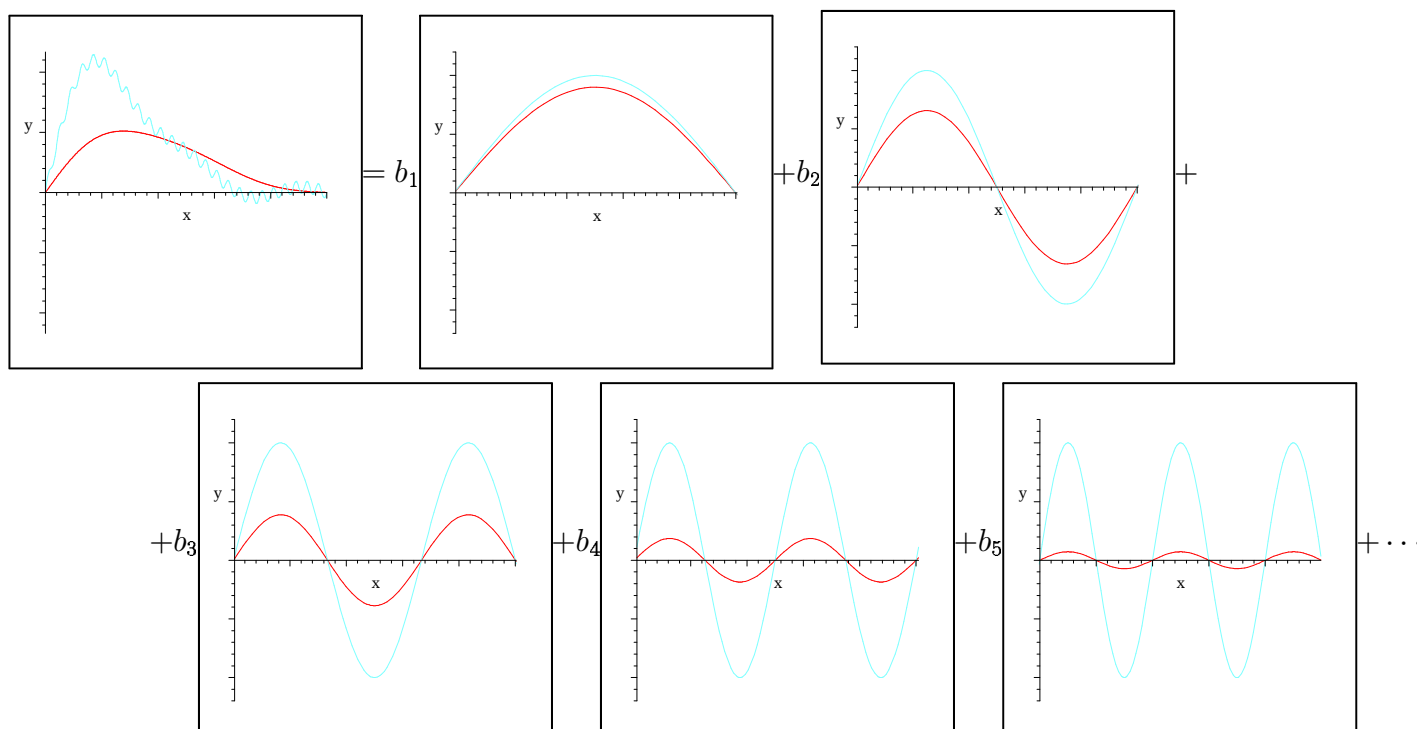
Graficamente temos para $t = 0$: $u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ou seja:

$$u(0, x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + b_4 \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) + b_5 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \dots$$



E para $t \neq 0$: $u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ou seja:

$$u(t, x) = b_1 e^{-\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + b_2 e^{-4 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + b_3 e^{-9 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + b_4 e^{-16 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) + \dots$$



36.2 Equação das ondas-separação de variáveis

Problemas de vibração elástica podem, em certos casos, ser bem modulados pela equação das ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \text{lap } u$$

Tal como fizemos para a equação do calor vamos considerar também aqui o caso unidimensional, apenas por simplicidade de exposição, pois todos os métodos indicados são facilmente generalizáveis a dimensões superiores.

Vamos então concentrar-nos no seguinte problema, que correspondente ao estudo das vibrações transversais de uma corda perfeitamente elástica de comprimento L :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equação das ondas} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{Condições fronteira} & \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(de Dirichlet)} & \\ \text{Condições iniciais} & \left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{com } x \in [0, L]. \quad (36.1)$$

A solução $u(t, x)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, L]$, representa o deslocamento u em relação ao equilíbrio no instante t e em cada ponto x da corda elástica cujo comprimento em repouso é L . A constante positiva c depende da densidade desta corda ideal e da tensão a que está sujeita. As condições fronteira indicam que as extremidades da corda estão fixas. As condições iniciais fixam a posição e a velocidade transversal da corda no instante inicial. (Note-se que se têm duas condições iniciais e que a equação é de segunda ordem em t .)

Aplicando o método da separação de variáveis, vamos determinar funções da forma $u(t, x) = T(t) X(x)$ soluções do problema linear homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = 0 \text{ e } u(t, L) = 0 \end{array} \right. \quad (36.2)$$

Temos

$$T''X = c^2 TX'' \quad \text{e} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Portanto $\lambda = \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$ tem de ser constante, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' = \lambda X \quad \text{com } X(0) = X(L) = 0 \\ T'' = \lambda c^2 T \end{array} \right. .$$

O primeiro problema já resolvemos anteriormente e só tem soluções não triviais quando

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_1,$$

sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Temos agora, para cada $n \in \mathbb{N}_1$,

$$T'' = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T.$$

Resolvendo esta equação homogênea de 2^a ordem obtemos

$$T(t) = A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right),$$

onde A e B são constantes arbitrárias. As soluções $T(t)X(x)$ que acabamos de obter,

$$\left(A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

podem ser somadas para obter uma solução geral (formal) do problema (36.2). Vamos agora determinar os coeficientes A_n e B_n de modo a que

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

seja solução de (36.1).

Usando a primeira condição inicial vem

$$u_0(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Reconhecemos a série de senos da função $u_0(x)$ e portanto

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Derivando formalmente $u(t, x)$ em ordem a t obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-n\pi c}{L} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{n\pi c}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

pelo que a segunda condição inicial fica

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Também aqui reconhecemos uma série de senos, agora da função $v_0(x)$, e portanto

$$\frac{n\pi c}{L} B_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

ou seja

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

36.3 Equação das ondas-Modos de vibração

Vimos na última aula que a solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equação das ondas} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{Condições fronteira} & \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{(de Dirichlet)} & \\ \text{Condições iniciais} & \left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{com } x \in [0, L], \quad (36.3)$$

tem a solução formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (36.4)$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \text{e} \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Para simplificar a interpretação desta solução vamos supor $v_0 \equiv 0$, ou seja $B_n = 0$ para todo n (esta simplificação não altera significativamente a interpretação que se segue; é sobretudo a uma simplificação na notação¹). Temos então

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Para cada t fixo, esta expressão é a série de senos da função $u(t, x)$, sendo os seus coeficientes dados por $A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$. Vemos então que a evolução temporal de $u(t, x)$ é consubstanciada na oscilação periódica dos coeficientes da expansão espacial em série de senos. Cada um dos termos da série que define $u(t, x)$,

$$A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

¹No caso geral, escrevendo o ponto (A_n, B_n) em coordenadas polares $(A_n, B_n) = \alpha_n (\cos \theta_n, \sin \theta_n)$, com $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ e $\theta_n = \arg(A_n + iB_n)$, temos

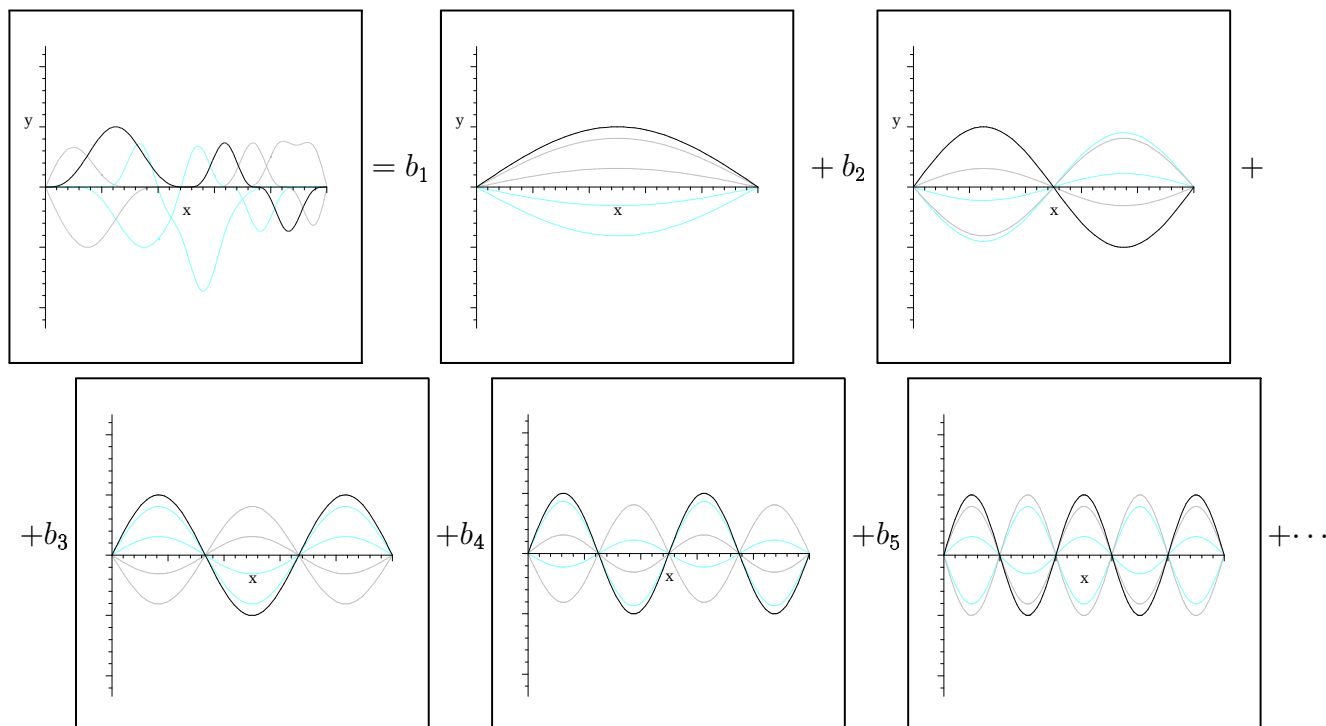
$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \left(\cos \theta_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \sin \theta_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t - \theta_n\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

é designado por harmónico (para $n = 1$ designa-se harmónico fundamental e para $n > 1$ temos os harmónicos supertónicos). O comprimento de onda de cada harmónico é o dobro da distância espacial entre dois zeros e é dado por $\frac{2L}{n}$. Cada um destes harmónicos vibra com uma frequência (temporal) dada por $\frac{nc}{2L}$; o comprimento de onda (espacial) é portanto inversamente proporcional à frequência temporal).

Graficamente temos:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-n^2 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{ou seja:}$$

$$u(t, x) = A_1 \cos\left(\frac{\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \\ + A_3 \cos\left(\frac{3\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right) + A_4 \cos\left(\frac{4\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{4\pi}{L} x\right) + A_5 \cos\left(\frac{5\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{5\pi}{L} x\right) + \dots$$



Embora já tenhamos resolvido o problema (36.3) e interpretado a sua solução como a sobreposição de vibrações harmónicas, é útil introduzir uma resolução alternativa que nos levará a uma diferente interpretação das (mesmas) soluções da equação das ondas. Antes de abor-darmos esta resolução alternativa devida a d'Alembert, vamos efectuar alguns cálculos com a solução (36.4) já obtida, que nos permitirão por um lado motivar a anunciada diferente resolução, e por outro, mostrar que as soluções obtidas pelos dois processos são idênticas. De facto temos usando igualdades trigonométricas bem conhecidas temos

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B_n}{2} \left(-\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) \right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) - \frac{B_n}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) \right] + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \frac{B_n}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) \right] \\
&= p(x+ct) + q(x-ct),
\end{aligned}$$

$$\text{com } p(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right) - \frac{B_n}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right) \right] \text{ e } q(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{A_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right) + \frac{B_n}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right) \right].$$

36.4 Equação das ondas-solução de d'Alembert

Começamos por ver que a forma que obtivemos acima é suficiente para garantirmos que se trata de uma solução da equação das ondas.

Proposição 36.1 *Se p e q são duas funções reais de classe C^2 então a função definida por*

$$u(t, x) = p(x+ct) + q(x-ct),$$

é solução da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Demonstração. Com $u(t, x) = p(x+ct) + q(x-ct)$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = cp'(x+ct) - cq'(x-ct) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 p''(x+ct) + c^2 q''(x-ct).$$

Do mesmo modo temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p'(x+ct) + q'(x-ct) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p''(x+ct) + q''(x-ct),$$

pelo que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. ■

Mas o recíproco também é verdadeiro como se mostra a seguir.

Proposição 36.2 *Se u é de classe C^2 e se $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, então existem funções p e q tais que*

$$u(t, x) = p(x + ct) + q(x - ct).$$

Demonstração. Considere-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\alpha = x + ct \quad \text{e} \quad \beta = x - ct.$$

E seja $U(\alpha, \beta) = u\left(\frac{\alpha - \beta}{2c}, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = c \frac{\partial U}{\partial \alpha} - c \frac{\partial U}{\partial \beta}$$

e usando o Teorema de Schwarz ($u \in C^2 \Rightarrow U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) - c \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right). \end{aligned}$$

De igual modo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}.$$

Então $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ escreve-se

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right),$$

donde se obtém

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \alpha} = 0.$$

Integrando esta última equação em relação a β vem

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = r(\alpha),$$

onde $r(\alpha)$ é uma função arbitrária de classe C^1 . Integrando agora em ordem a α obtemos

$$U = p(\alpha) + q(\beta),$$

onde $p(\alpha)$ é uma primitiva de $r(\alpha)$ (portanto é uma função arbitrária de classe C^2) e $q(\beta)$ é uma função arbitrária de classe² C^2 . ■

² A conclusão de p e q serem de classe C^2 advém do facto de sabermos *a priori* que u (e portanto U) é de classe C^2 .

De acordo com estes resultados a solução do problema (36.3) escreve-se

$$u(t, x) = p(x + ct) + q(x - ct).$$

Vamos agora determinar as funções p e q de forma a que u satisfaça as condições iniciais e fronteira de (36.3).

Começemos por impor as condições iniciais (supondo $u_0(x)$ e $v_0(x)$ são suficientemente regulares³)

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = u_0(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{com } x \in [0, L].$$

integrando a segunda equação obtemos

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = u_0(x) \\ p(x) - q(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(s) ds + K \end{cases} \quad \text{com } x \in [0, L]$$

donde (para $x \in [0, L]$)

$$p(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds + \frac{K}{2}$$

e

$$q(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds - \frac{K}{2},$$

onde K é uma constante arbitrária e irrelevante pois $u(t, x) = p(x + ct) + q(x - ct)$ não depende desta constante. Tomemos pois $K = 0$.

Note-se que apenas ficamos a conhecer as funções p e q no intervalo $[0, L]$ e que para construirmos a função u necessitamos de conhecer as estas funções em toda a recta real. Vamos então impor as condições fronteira

$$\begin{cases} u(t, 0) = p(ct) + q(-ct) = 0 \\ u(t, L) = p(L + ct) + q(L - ct) = 0 \end{cases}.$$

³Basta por exemplo que u_0 seja de classe C^2 , v_0 seja de classe C^1 e tais que

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = 0,$$

(ou seja u_0 , v_0 e u_0'' têm também de satisfazer as condições fronteira). No entanto condições menos restritivas são possíveis se generalizarmos o conceito de solução. De facto podemos considerar a expressão (36.5) como uma solução generalizada do problema (36.3) quando pedimos apenas que v_0 seja integrável, sendo a função u_0 arbitrária tal que $u_0(0) = u_0(L) = 0$.

Uma vez que t é um número real qualquer, podemos tomar $\tau = ct$ como um número arbitrário de $\mathbb{R}$ e escrever

$$\begin{cases} p(\tau) = -q(-\tau) \\ p(L + \tau) = -q(L - \tau) \end{cases}.$$

Donde

$$\begin{aligned} p(\tau + 2L) &= p(L + \tau + L) \\ &= -q(L - (L + \tau)) \\ &= -q(-\tau) \\ &= p(\tau), \end{aligned}$$

ou seja p é uma função periódica de período $2L$. Como $q(\tau) = -p(-\tau)$, a função q também é periódica de período $2L$.

Portanto a solução do problema (36.3) é dada pelas seguintes expressões

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, x) = p(x + ct) + q(x - ct) \\ p(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds \quad \text{se } x \in [0, L] \\ q(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds \quad \text{se } x \in [0, L] \\ p(\tau) = -q(-\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ p(\tau) = p(\tau + 2L) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (36.5)$$

Esta solução deve ser interpretada como a sobreposição de uma onda que se desloca para a esquerda (consustanciada na parcela $p(x + ct)$ no caso $c > 0$) com uma onda que se desloca para a direita (consustanciada na parcela $q(x - ct)$ no caso $c > 0$), ambas com uma velocidade de propagação expressa pelo número c . Ao chocar com os pontos de fronteira ($x = 0$ e $x = L$) a onda sobreposta u reflete-se com inversão de sinal. De facto a parte de u que sai do intervalo $[0, L]$ através da função q entra pelo mesmo ponto fronteira ($x = L$ no caso $c > 0$) através da função p com sinal contrário; reciprocamente o que sai na função p entra pelo mesmo ponto fronteira ($x = 0$ no caso $c > 0$) na função q com sinal oposto.

Na seguinte figura representa-se evolução temporal das funções

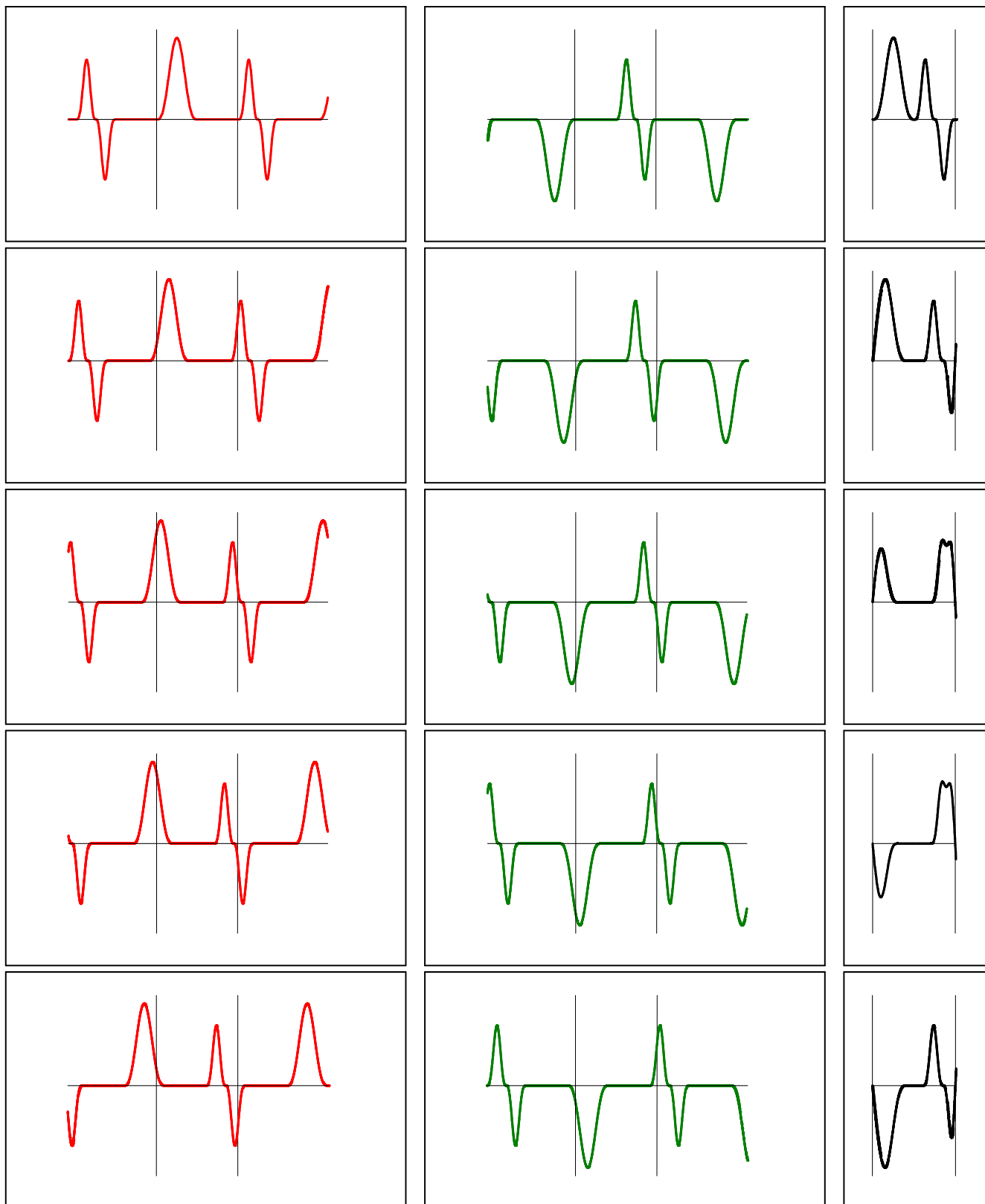
$$p(x + ct), \quad q(x - ct) \quad \text{e} \quad u(t, x) = p(x + ct) + q(x - ct),$$

cada linha representando um pequeno acréscimo temporal em relação à linha anterior:

$$p(x + ct)$$

$$q(x - ct)$$

$$u(t, x)$$



36.5 Exemplo

Considere-se a seguinte concretização de problema (36.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, \pi) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = \sin x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{com } x \in [0, \pi].$$

De acordo com a solução (36.4) temos

$$u(t, x) = \cos(ct) \sin(x).$$

De acordo com a solução (36.5) temos

$$p(x) = \frac{1}{2} \sin(x) = q(x),$$

primeiramente para $x \in [0, \pi]$ e em consequência, pelas relações $p(\tau) = -q(-\tau)$ e $p(\tau) = p(\tau + 2\pi)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \sin(x + ct) + \frac{1}{2} \sin(x - ct).$$

Não se trata de soluções diferentes, mas da mesma solução vista sob perspectivas alternativas. De facto usando igualdades trigonométricas bem conhecidas concluímos

$$\frac{1}{2} \sin(x + ct) + \frac{1}{2} \sin(x - ct) = \cos(ct) \sin(x).$$