

35.1 Série de Fourier na forma de exponenciais complexas

Seja f definida em $[0, 2\pi]$, para simplificar notação, integrável neste intervalo, e a sua série de Fourier

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

$$\text{com } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Utilizando as fórmulas de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} SF_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

com¹

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{a_0}{2} & \text{se } n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{se } n \leq -1 \end{cases}, \quad (35.1)$$

ou seja

$$\begin{aligned} c_n &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(nx) - i \sin(nx)}{2} dx & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \right) & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(-nx) + i \sin(-nx)}{2} dx & \text{se } n \leq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx & \text{se } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx & \text{se } n \leq -1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

¹Ou seja, para $n \geq 0$,

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Resumindo na forma de exponenciais complexas a série de Fourier de uma função $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ escreve-se

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

35.2 Convergência em média quadrática

A série de Fourier de uma função f integrável em $[0, 2\pi]$, pode-se escrever na forma

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n(x),$$

onde as funções $\varphi_n(x)$ são definidas por

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

e os coeficientes por

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f \overline{\varphi_n} dx,$$

onde $\overline{\varphi_n}$ designa o complexo conjugado da função φ_n (portanto $\overline{\varphi_n} = \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}$). Estas funções φ_n satisfazem a seguinte relação²

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varphi_m \overline{\varphi_n} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} \frac{e^{i(m-n)2\pi} - 1}{2\pi i(m-n)} & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx & \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Então se definirmos o produto interno (num espaço adequado)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \overline{g} dx,$$

temos

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{m,n},$$

²O símbolo $\delta_{m,n}$ é designado por delta de Kronecker e é definido por:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}.$$

ou seja podemos interpretar o conjunto das funções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como uma base ortonormada de um certo espaço. Por outro lado com esta notação vem

$$\alpha_n = \langle f, \varphi_n \rangle,$$

que pode ser interpretado como a projecção de f na direcção φ_n , e portanto

$$SF_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad (35.2)$$

será a projecção no espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Este espaço será um subespaço dum espaço designado $L^2([0, 2\pi])$ a que está associada a norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \sqrt{\langle f, f \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2 dx}. \end{aligned}$$

Neste espaço constituído de funções de quadrado integrável, devemos então considerar

$$f = g \quad \text{sse} \quad \|f - g\|_{L^2} = 0.$$

Ou seja devemos identificar funções difiram apenas num conjunto de medida nula. Do mesmo modo devemos considerar que uma sequência de funções $f_n \in L^2([0, 2\pi])$ converge para $f \in L^2([0, 2\pi])$ sse

$$\lim_n \|f_n - f\|_{L^2} = 0,$$

ou seja sse

$$\lim_n \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 dx = 0.$$

Esta convergência é designada por **convergência em média quadrática**. Portanto é neste sentido que deve ser considerada a convergência da série (35.2). Pode-se mostrar que o espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de facto todo o espaço $L^2([0, 2\pi])$. Ou seja para qualquer $f \in L^2([0, 2\pi])$ tem-se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

É este resultado que é enunciado no seguinte Teorema.

Teorema 35.1 Dado $f \in L^2([0, 2\pi])$, defina-se

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad e \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Então

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |f_N(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

35.3 Equação do Calor não homogénea

Considere-se o problema do calor numa barra de comprimento L e com constante de difusão térmica k , em que é dada uma distribuição inicial de temperatura $f(x)$ e as extremidades da barra são mantidas às temperaturas T_1 e T_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = T_1 \\ u(t, L) = T_2 \end{array} \right. \\ u(0, x) = f(x) \end{array} \right.$$

Já resolvemos este problema no caso $T_1 = T_2 = 0$. Se tentarmos seguir a mesma estratégia de resolução deparamo-nos com uma dificuldade: apesar de ser possível determinar soluções separadas do problema sem a condição inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = T_1 \\ u(t, L) = T_2 \end{array} \right. \end{array} \right.,$$

este último problema não é homogéneo; combinações lineares de soluções não são soluções. Pelo que não é útil determinar muitas soluções deste problema. Em vez disso vamos determinar apenas uma solução u_0 , i.e. uma função (simples) que satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_0(t, 0) = T_1 \\ u_0(t, L) = T_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Uma vez determinado u_0 vamos procurar a função $w = u - u_0$. Esta função deve ser tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, L) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = f(x) - u_0(0, x) \end{array} \right.,$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(t, 0) &= u(t, 0) - u_0(t, 0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(t, L) &= u(t, L) - u_0(t, L) = T_2 - T_2 = 0, \end{aligned}$$

$$w(0, x) = u(0, x) - u_0(0, x) = f(x) - u_0(0, x).$$

Portanto w satisfaz uma equação que já sabemos resolver. Uma vez determinada a função w , obtemos a função pretendida é $u = u_0 + w$.

Do ponto de vista matemático qualquer função u_0 nas condições indicadas servirá para resolver o problema, pelo que a escolha deverá obedecer a um critério de simplicidade. Do ponto de vista físico será interessante escolher uma função u_0 nas condições indicadas que tenha um significado físico relevante.

No presente caso, determinar (se possível) u_0 independente da variável t será uma boa escolha uma vez que terá a interpretação física óbvia de **solução de equilíbrio** do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u_0(t, 0) = T_1 \\ u_0(t, L) = T_2 \end{cases} \end{cases}.$$

A função w terá então a interpretação da diferença de temperatura em relação ao equilíbrio quando distribuição inicial de temperatura é $f(x)$.

Portanto, impondo $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$ (solução de equilíbrio), obtemos $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$ e primitivando duas vezes vem $u_0(x) = A + Bx$. Finalmente as condições fronteira impõem

$$u_0(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x,$$

que é, portanto, a solução de equilíbrio procurada. Por outro lado a função w foi determinada em (33.1) e é

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

onde os coeficientes b_n são determinados por

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L} x\right).$$

Atendendo à forma de u_0 e ao nosso conhecimento sobre séries de senos concluímos que a solução procurada é (pelo menos no caso de f ser contínua e seccionalmente monótona)

$$u(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

onde os coeficientes b_n são determinados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx.$$

O método utilizado na resolução deste problema é facilmente generalizável para resolver outros problemas não homogêneos como aqueles se indicam nos seguintes exemplos.

Exemplo 35.1 Considere-se o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x) \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ u(0, x) = \sin(\pi x) \end{array} \right. .$$

(Uma barra, com as extremidades sempre a 0 graus, é aquecida na parte central.)

Vamos procurar uma solução u_0 de equilíbrio (i.e. tal que $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$) do problema sem a condição inicial. Obtemos

$$u_0''(x) = -\sin(\pi x) \quad \text{com} \quad u_0(0) = u_0(1) = 0,$$

donde

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x).$$

Vamos agora determinar $w = u - u_0$. Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x) \end{array} \right. .$$

Donde

$$w(t, x) = e^{-\pi^2 t} \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x)$$

e

$$u(t, x) = \left(e^{-\pi^2 t} \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi^2} \right) \sin(\pi x).$$

Exemplo 35.2 Considere-se o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ u(0, x) = \cos(\pi x) \end{array} \right. .$$

(Uma barra isolada é aquecida e arrefecida periodicamente e uniformemente segundo uma lei sinusoidal.)

Vamos procurar uma solução u_0 que não dependa da variável x (i.e. uma solução uniforme) do problema. Obtemos

$$u'_0(t) = \text{sen } t,$$

donde podemos tomar

$$u_0(t) = -\cos t.$$

Vamos agora determinar $w = u - u_0$. Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = \cos(\pi x) + 1 \end{array} \right. .$$

Donde

$$w(t, x) = e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 1$$

e

$$u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 1 - \text{sen } t.$$