

33.1 Séries de Fourier - Cálculo dos coeficientes

Seja f definida em $[0, L]$ tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right)$$

Se supusermos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|)$ é convergente, então a série trigonométrica acima é uniformemente convergente, pelo que se podem fazer os seguintes cálculos

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx &= \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx + b_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx &= \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx + b_n \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx \right) \end{aligned}$$

utilizando os seguintes resultados, para $n, m \in \mathbb{N}_1$,

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = 0$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{se } m = n \end{cases}$$

Obtemos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

e

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

33.2 Séries de Fourier - Definição formal

Seja f definida em $[0, L]$, integrável neste intervalo, e defina-se para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

e com estes coeficientes considere-se a série

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right)$$

designada por **série de Fourier** de f .

Já sabemos se f for definida por uma série deste tipo com coeficientes absolutamente somáveis então $SF_f(x) = f(x)$. A questão que surge é: em que condições (dada uma função f qualquer) se tem $SF_f(x) = f(x)$?

Note-se que o domínio desta série de Fourier estende-se naturalmente a toda a recta real, i. e. em caso de convergência podemos dizer que SF_f está definida em $\mathbb{R}$ e é periódica de período L ; i. e.¹

$$SF_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad SF_f(x+L) = SF_f(x)$$

Pelo que devemos considerar as séries de funções periódicas f ou de prolongamentos periódicos de funções definidas em intervalos (como o caso que consideramos acima) quando pomos a questão: $SF_f(x) = f(x)$?

Então, se partirmos de uma função f definida no intervalo $[-\ell, \ell]$, fazendo um prolongamento periódico de período $L = 2\ell$ obtemos

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx$$

atendendo a que o integral de uma função periódica ao longo de um período é independente do ponto inicial; e assim obtemos a série de Fourier

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) \right)$$

¹Podemos também considerar

$$SF_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{e} \quad SF_f(x+L) = SF_f(x)$$

se f tiver valor complexos (mas variável real).

33.3 Série de Fourier - Teoremas de convergência pontual

33.3.1 Funções seccionalmente monótonas

Pode-se mostrar o seguinte Teorema

Teorema 33.1 *Seja f definida em $\mathbb{R}$, limitada, e tal que $f(x+L) = f(x)$. Se f é e seccionalmente monótona então²*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad SF_f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

Note-se que, se para além das condições anteriores, f for contínua no ponto x , temos

$$SF_f(x) = f(x).$$

Uma função periódica de período L diz-se seccionalmente monótona se for possível subdividir um intervalo de comprimento L num número finito de subintervalos, no interior dos quais a função é monótona.

33.3.2 Funções seccionalmente C^1

É mais frequente encontrar na literatura o seguinte teorema igualmente útil e independente do anterior (existem funções que satisfazem as condições do primeiro mas não satisfazem as do segundo teorema e vice-versa).

Teorema 33.2 *Se f definida em $\mathbb{R}$ é tal que $f(x+L) = f(x)$ e se é seccionalmente C^1 então*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad SF_f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

Uma função periódica de período L diz-se seccionalmente C^1 se for possível subdividir um intervalo de comprimento L num número finito de subintervalos onde a função é C^1 existindo (com valores finitos) os limites laterais da derivada em cada um dos extremos destes subintervalos.

Por exemplo a função f que é o prolongamento periódico da função $\sqrt{x(1-x)}$ definida no intervalo $[0, 1]$ não é seccionalmente C^1 e portanto não está nas condições do Teorema 33.2. Contudo é seccionalmente monótona e limitada estando então nas condições do Teorema 33.1. Por outro lado, o prolongamento periódico da função $x^3 \sin \frac{2\pi}{x}$ definida no intervalo $]0, 1]$ está nas condições do Teorema 33.2 mas não nas do Teorema 33.1.

²Para explicar a notação utilizada neste enunciado temos (pela definição das várias notações)

$$\begin{aligned} f(x^+) + f(x^-) &= \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t) + \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)). \end{aligned}$$

33.4 Exemplo

Considere-se a função $f(x) = x$ definida no intervalo $]-\pi, \pi]$. Calculando os coeficientes da sua série de Fourier temos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

porque f é uma função ímpar. Usando este mesmo facto temos (para $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

De acordo com os teoremas anteriores temos

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx) = x$$

para além dos resultados óbvios

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(-n\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(n\pi) = 0.$$

33.5 Séries de senos

Na consideração da equação de calor numa barra com extremidades a zero graus já nos deparamos com o problema de desenvolver em série de senos uma função f definida num intervalo da forma $[0, \ell]$. Vamos resolver este problema fazendo o desenvolvimento em série de Fourier não da função f no intervalo $[0, \ell]$ mas do seu prolongamento ímpar no intervalo $[-\ell, \ell]$.³

Dada então uma função f definida no intervalo $[0, \ell]$, seja $\tilde{f}$ definida em $[-\ell, \ell]$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]0, \ell] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-\ell, 0[\end{cases}.$$

³ A propósito da consideração de intervalos abertos ou fechados ou abertos à esquerda...note-se que a série de Fourier de uma função fica inalterada se modificarmos esta função num ponto ou mesmo num conjunto de medida nula; pois o cálculo dos coeficientes fica inalterado de acordo com propriedades bem conhecidas do cálculo integral.

Então

$$SF_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) \right)$$

com

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx. \end{aligned}$$

Reparando que no intervalo $[0, \ell]$ as funções $\tilde{f}$ e f coincidem, obtemos a **série de senos** de f :

$$SS_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)$$

com

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx.$$

Podemos usar os teoremas anteriores para estudar em que pontos se tem a igualdade $SS_f(x) = f(x)$ através do estudo da igualdade $SF_{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x)$.

33.6 Séries de cosenos

Na consideração da equação de calor numa barra totalmente isolada já nos deparamos com o problema de desenvolver em série de cosenos uma função f definida num intervalo da forma $[0, \ell]$. Vamos resolver este problema de forma análoga ao que fizemos para a série de senos, fazendo o desenvolvimento em série de Fourier não da função f no intervalo $[0, \ell]$ mas do seu prolongamento par no intervalo $[-\ell, \ell]$.

Dada então uma função f definida no intervalo $[0, \ell]$ seja $\tilde{f}$ definida em $[-\ell, \ell]$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, \ell] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-\ell, 0[\end{cases}$$

Então

$$SF_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) \right)$$

com

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right) dx \end{aligned}$$

Reparando que no intervalo $[0, \ell]$ as funções $\tilde{f}$ e f coincidem, obtemos a **série de cosenos** de f :

$$SC_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

com

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Podemos usar os teoremas anteriores para estudar em que pontos se tem a igualdade $SC_f(x) = f(x)$ através do estudo da igualdade $SF_{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x)$.

33.7 Exemplo

Exemplo 33.1 Considere-se $f(x) = e^x$ definida no intervalo $[0, 1]$. Temos

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 e^x \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 (e^{(1+i\pi n)x} + e^{(1-i\pi n)x}) dx = \frac{e^{(1+i\pi n)} - 1}{1 + i\pi n} + \frac{e^{(1-i\pi n)} - 1}{1 - i\pi n} \\ &= 2 \frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 e^x \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{i} \int_0^1 (e^{(1+i\pi n)x} - e^{(1-i\pi n)x}) dx = \frac{-1}{i} 2i\pi n \frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \\ &= 2n\pi \frac{1 - e(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Então a série de cosenos de f é

$$SC_f(x) = e - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \cos(\pi n x),$$

a série de senos de f é

$$SS_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\pi \frac{1 - e(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \sin(\pi n x),$$

e a série de Fourier de f é

$$SF_f(x) = e - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{e - 1}{1 + 4n^2\pi^2} (\cos(2\pi n x) - 2n\pi \sin(2\pi n x)).$$

E como f é monótona, temos a seguinte convergência pontual:

$$SC_f(x) = e^x \quad \text{para } x \in [0, 1],$$

$$SS_f(x) = e^x \quad \text{para } x \in]0, 1[$$

e

$$SF_f(x) = e^x \quad \text{para } x \in]0, 1[$$

$$e \quad SF_f(0) = SF_f(1) = \frac{e + 1}{2}.$$