

29.1 Equação linear homogénea de ordem n ; continuação

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\text{H})$$

29.1.1 Raízes complexas conjugadas

Se λ é uma raiz complexa com multiplicidade m de um polinómio característico com coeficientes $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0)$ reais, então o número $\bar{\lambda}$ (complexo conjugado de λ) também é raiz, com a mesma multiplicidade m , do mesmo polinómio. Pelo que neste caso temos as soluções (da equação linear homogénea)

$$t^p e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad t^p e^{\bar{\lambda} t}$$

com $p \in \{0, \dots, m-1\}$. Então as seguintes combinações lineares destas ainda são soluções:

$$\frac{1}{2} t^p e^{\lambda t} + \frac{1}{2} t^p e^{\bar{\lambda} t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i} t^p e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} t^p e^{\bar{\lambda} t}.$$

Portanto, obtemos as seguintes soluções reais linearmente independentes (no caso $\beta \neq 0$)

$$t^p e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{e} \quad t^p e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

onde $\alpha = \text{Re } \lambda$ e $\beta = \text{Im } \lambda$.

29.1.2 Exemplos

Exemplo 29.1 $y''' - 3y' + 2y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^3 - 3\lambda + 2$.

$\lambda = 1$ é uma raiz ($1 - 3 + 2 = 0$)

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Polinómio característico $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

Raízes do polinómio característico: $\lambda = 1$, com multiplicidade 2, e $\lambda = -2$.

Soluções linearmente independentes: e^t ; te^t ; e^{-2t} .

Solução geral:

$$y(t) = k_1 e^t + k_2 te^t + k_3 e^{-2t},$$

onde k_1 , k_2 e k_3 são constantes arbitrárias.

Exemplo 29.2 $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ *Polinómio característico:* $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.*Raízes do polinómio característico:* $\lambda = 0$; $\lambda = 1$; $\lambda = 2$.*Soluções linearmente independentes:* 1 ; e^t ; e^{2t} .*Solução geral:*

$$y(t) = k_1 + k_2 e^t + k_3 e^{2t},$$

*onde k_1 , k_2 e k_3 são constantes arbitrárias.***Exemplo 29.3** $y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0$ *Polinómio característico:* $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26$. $\lambda = 2$ é uma raiz ($8 - 32 + 50 - 26 = 0$)*Regra de Ruffini*

2	1	-8	25	-26
		2	-12	26
	1	-6	13	0

Polinómio característico $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = (\lambda - 2)((\lambda - 3)^2 + 4)$ *Raízes do polinómio característico:* $\lambda = 2$; $\lambda = 3 + i2$; $\lambda = 3 - i2$.*Soluções linearmente independentes:* e^{2t} ; $e^{3t} \cos(2t)$; $e^{3t} \sin(2t)$.*Solução geral:*

$$y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t} \cos(2t) + k_3 e^{3t} \sin(2t),$$

*onde k_1 , k_2 e k_3 são constantes arbitrárias.***Exemplo 29.4** $\frac{d^4 y}{dt^4} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$ *Polinómio característico:* $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$ *Raízes do polinómio característico:* $\lambda = i$; $\lambda = -i$ ambas com multiplicidade 2.*Soluções linearmente independentes:* $\cos t$; $\sin t$; $t \cos t$ e $t \sin t$ *Solução geral:*

$$y(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 t \cos t + k_4 t \sin t,$$

onde k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são constantes arbitrárias.

29.2 Método dos coeficientes indeterminados

29.2.1 Fundamentação

Vamos agora abordar a EDO de coeficientes constantes, mas não homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(t) \quad (29.1)$$

que vamos escrever na forma:

$$Ly = h$$

onde

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

Embora já tenhamos o método da variação das constantes para resolver este problema, vamos elaborar um método que envolve menos cálculos. Este método dos coeficientes indeterminados tem contudo um campo de aplicação muito restrito como iremos ver.

Hipótese: Suponha-se agora que a função h é solução de uma EDO linear homogénea de coeficientes constantes.

Existe portanto um operador diferencial

$$\tilde{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \tilde{a}_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \tilde{a}_{m-2} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} + \cdots + \tilde{a}_2 \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{a}_1 \frac{d}{dt} + \tilde{a}_0$$

tal que $\tilde{L}h = 0$. Então se $Ly = h$, vem $\tilde{L}Ly = \tilde{L}h$, e portanto,

$$(\tilde{L}L)z = 0, \quad (29.2)$$

isto é, podemos procurar uma solução particular da equação não homogénea (29.1) na solução geral da equação homogénea (29.2). Note-se ainda que o polinómio característico desta equação (29.2) é o produto dos polinómios característicos correspondentes ao operador L e ao operador $\tilde{L}$. Portanto a solução geral de (29.2) é dada por $y = y_1 + y_2$, onde y_1 é a solução geral da equação homogénea $Ly_1 = 0$. Pelo que iremos procurar os coeficientes de y_2 de tal forma que $Ly_2 = h$, uma vez que $Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_2$.

29.2.2 Exemplos

Exemplo 29.5 Considere-se a seguinte equação

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = e^t.$$

Neste caso $L = \frac{d^4}{dt^4} + 2 \frac{d^2}{dt^2} + 1$ e $h = e^t$. Facilmente reconhecemos que a função e^t é solução de uma equação homogénea para a qual o polinómio característico tenha a raiz $\lambda = 1$ ($e^t = e^{\lambda t}$). Portanto podemos tomar o polinómio (binómio) $\lambda - 1$ e o operador $\tilde{L} = \frac{d}{dt} - 1$ de facto

$$\tilde{L}e^t = \frac{de^t}{dt} - e^t = e^t - e^t = 0.$$

Então as soluções de $Ly = h$ são soluções de $\tilde{L}Ly = 0$. Esta última equação homogénea tem polinómio característico

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda - 1)$$

pelo que $y = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 t \cos t + k_4 t \sin t + \alpha e^t$. Então

$$\begin{aligned} Ly &= L(k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 t \cos t + k_4 t \sin t) + \alpha L e^t = \alpha L e^t \\ &= \alpha \left(\frac{d^4}{dt^4} e^t + 2 \frac{d^2}{dt^2} e^t + e^t \right) = \alpha 4 e^t \end{aligned}$$

Para que $Ly = h = e^t$ vem $\alpha 4 = 1$. Pelo que a solução geral é

$$y = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 t \cos t + k_4 t \sin t + \frac{e^t}{4},$$

onde k_1, k_2, k_3 e k_4 são constantes arbitrárias.

Exemplo 29.6 Considere-se a seguinte equação¹

$$y'' - 3y' + 2y = te^t$$

Facilmente reconhecemos que a função te^t é solução de uma equação homogénea para a qual o polinómio característico tenha a raiz $\lambda = 1$ com multiplicidade m (pelo menos) igual a dois $(te^t = t^{m-1}e^{\lambda t})^2$. Então as soluções da equação são soluções de uma equação homogénea³ que tem polinómio característico

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$$

pelo que $y = k_1 e^{2t} + k_2 e^t + \alpha te^t + \beta t^2 e^t$. Então

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (\alpha te^t + \beta t^2 e^t)'' - 3(\alpha te^t + \beta t^2 e^t)' + 2(\alpha te^t + \beta t^2 e^t) \\ &= (\alpha(1+t)e^t + \beta(2t+t^2)e^t)' - 3(\alpha(1+t)e^t + \beta(2t+t^2)e^t) \\ &\quad + 2(\alpha te^t + \beta t^2 e^t) \\ &= (\alpha(2+t)e^t + \beta(2+4t+t^2)e^t) - 3\alpha e^t + (-3\alpha - 6\beta + 2\alpha)te^t \\ &\quad + (-3\beta + 2\beta)t^2 e^t \\ &= (2\alpha + 2\beta - 3\alpha)e^t + (\alpha + 4\beta - \alpha - 6\beta)te^t + (\beta - \beta)t^2 e^t \\ &= (2\beta - \alpha)e^t - 2\beta te^t \end{aligned}$$

Concluimos portanto que

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases}$$

donde $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = -1$. Pelo que a solução geral é $y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

¹Neste caso $L = \frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 2$ e $h = te^t$.

²Portanto podemos tomar o polinómio $(\lambda - 1)^2$ correspondente ao operador $\tilde{L} = (\frac{d}{dt} - 1)^2$. De facto

$$\tilde{L}(te^t) = (\frac{d}{dt} - 1)^2 (te^t) = (\frac{d}{dt} - 1) \left((te^t)' - (te^t) \right) = (\frac{d}{dt} - 1) e^t = 0$$

³I. e. as soluções de $Ly = h$ são soluções de $L\tilde{L}y = 0$.

Introduzindo outras condições poder-se-á eventualmente calcular os coeficientes k_1 e k_2 desta solução. Por exemplo se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos, de

$$y'(t) = 2k_1 e^{2t} + k_2 e^t - (1+t)e^t - \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^t,$$

as equações

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

donde $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$ e $y(t) = e^{2t} - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^t$.

29.2.3 Limitações

Ao contrário do método da variação das constantes, o método dos coeficientes indeterminados só se aplica a EDO's lineares de coeficientes constantes. Mas outra restrição importante é a hipótese que foi feita sobre h :

A função h tem de ser uma combinação linear de funções do tipo $t^p e^{\lambda t}$

Por exemplo a equação $y''' - y' = \arctg t$ não pode ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados mas pode ser resolvida pela fórmula da variação das constantes.