

27.1 Exponencial de matrizes gerais. Exemplos.

Exemplo 27.1 Considere-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = \pi \quad e \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculando os seus valores próprios obtemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)^2.$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ é semelhante a uma das seguintes formas canónicas¹ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. A primeira com dois blocos e a segunda com um bloco de Jordan.

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, facilmente concluímos que $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designa-se então por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ as colunas da matriz $\mathbf{S}$ (com $\det \mathbf{S} \neq 0$) tal que $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{J}$. Obtemos $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, ou seja $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Podemos escolher

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad (uma \text{ vez feita esta escolha }) \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo que podemos tomar $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\pi(1+t) + \sqrt{2}t)e^{2t} \\ (-\pi t + (1-t)\sqrt{2})e^{2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 27.2 Considere-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = y(0) = 0 \quad e \quad z(0) = 1.$$

¹A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculando os seus valores próprios obtemos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) + 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ é semelhante a uma das seguintes formas canónicas² $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, facilmente concluímos que $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designa-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ as colunas da matriz $\mathbf{S}$ (com $\det \mathbf{S} \neq 0$) tal que $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. Obtemos $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ ou seja

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$. Então

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \beta \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar $\alpha = \beta = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} t - \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

² A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Exemplo 27.3 Considere-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \quad \text{com } x(1) = y(1) = 0 \quad e \quad z(1) = 1.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Calculando os seus valores próprios obtemos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 2-\lambda \\ &= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) + 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ é semelhante a uma das seguintes formas canónicas³ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ facilmente concluímos que $\mathbf{v}$ é dado por $\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, onde α e β são escalares arbitrários; pelo que apenas temos dois vectores próprios linearmente independentes e portanto só podemos ter dois blocos de Jordan na forma canónica associada, i. e.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designa-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ as colunas da matriz $\mathbf{S}$ (com $\det \mathbf{S} \neq 0$) tal que $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. Obtemos $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$, ou seja

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Para que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ possa ter solução, o vector $\mathbf{v}_1$ tem de pertencer ao espaço das colunas da matriz $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$; concluímos que $\mathbf{v}_1$ tem de ser múltiplo do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tomemos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Uma solução possível é

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim $\mathbf{v}_3$ tem de ser um vector próprio de $\mathbf{A}$ linearmente independente do vector próprio $\mathbf{v}_1$, pelo que podemos tomar

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

³A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t & t & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t & 1+t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{(t-1)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} 2-t & t-1 & t-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & t-1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t-1)e^{2(t-1)} \\ 0 \\ te^{2(t-1)} \end{bmatrix}$$

Observação 27.1 Note-se que na resolução de um problema linear homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, podemos portanto calcular uma matriz $\mathbf{J}$ na forma canónica de Jordan semelhante a $\mathbf{A}$, ou seja $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$, e obter a solução geral

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{c},$$

sem ter de calcular a matriz $\mathbf{S}^{-1}$, porque $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(0)$ é um vector constante. A matriz $\mathbf{M}(t) \equiv \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}$ é uma **matriz fundamental** da equação $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, porque satisfaz as propriedades $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ e $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$ ⁴.

Exercício 27.1 Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz constante, mostre que se $\mathbf{M}(t)$ é uma **matriz fundamental** da equação $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ (ou seja $\mathbf{M}(t)$ é uma função matricial tal que $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ e $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$), então

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{M}^{-1}(s) = e^{(t-s)\mathbf{A}}.$$

27.2 Fórmula da variação das constantes.

Voltemos a considerar o sistema

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante (não depende de t) e $\mathbf{B}(t)$ é uma função definida para valores de t num intervalo real I com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, na nossa notação, com valores nas matrizes $n \times 1$).

Agora que já estamos familiarizados com as exponenciais de matrizes podemos facilmente mostrar o seguinte teorema.

Teorema 27.1 (*Fórmula da variação das constantes para sistema de equações de coeficientes constantes*)

⁴De facto

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}} = \frac{d}{dt}\mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$$

e

$$\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \det \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \det \mathbf{S} \neq 0.$$

Seja $\mathbf{B} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes. Então o problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

tem uma única solução definida em I dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s) ds$$

Observação 27.2 A parcela $\mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$ corresponde à solução da equação homogénea e a parcela $\int_{t_0}^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s) ds$ corresponde à solução do problema para a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Temos então a seguinte situação que é geral para as equações lineares e que demonstraremos a seguir:

$$\boxed{\boxed{\text{Solução geral da equação linear}}} = \boxed{\boxed{\text{Solução geral da equação homogénea associada}}} + \boxed{\boxed{\text{Solução particular da equação linear}}}$$

Demonstração. Atendendo às propriedades conhecidas da exponencial de matrizes, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) &\Leftrightarrow \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}} \frac{d}{dt}\mathbf{y} - \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-(s-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s) ds \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t_0) + \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}} \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{-(s-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s) ds \end{aligned}$$

■

Exemplo 27.4 Considere-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial na forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a fórmula da variação das constantes a solução é dada por (o cálculo de $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ foi feito anteriormente no Exemplo 27.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{4(t-s)} + e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4(t-s)} - e^{2(t-s)}}{2} \\ \frac{e^{4(t-s)} - e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4t} + e^{2(t-s)}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{4t-3s} + e^{2t-s} \\ e^{4t-3s} - e^{2t-s} \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int_0^t (e^{4t-3s} + e^{2t-s}) ds \\ \int_0^t (e^{4t-3s} - e^{2t-s}) ds \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^t + e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^t - e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos de seguida mostrar a relação geral

$$\boxed{\boxed{\text{Solução geral da equação linear}}} = \boxed{\boxed{\text{Solução geral da equação homogénea associada}}} + \boxed{\boxed{\text{Solução particular da equação linear}}}$$

Teorema 27.2 Se $\mathbf{y}(t)$ e $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ são soluções de $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}$, então

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{u}(t)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é solução da equação homogénea $\frac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Portanto se conhecermos uma solução particular $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ podemos conhecer qualquer solução $\mathbf{y}(t)$ se conhecermos todas as soluções $\mathbf{u}(t)$ da equação homogénea.

Demonstração. Seja $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)$, então

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{y}(t) - \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B} - \mathbf{B} = 0$$

■

Observação 27.3 Note-se que o resultado e a demonstração apenas precisam da hipótese " $\frac{d}{dt} - \mathbf{A}$ é um operador linear" e é válida portanto para qualquer equação do tipo $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$, onde $\mathbf{L}$ é um operador linear num certo espaço (de funções) E e $\mathbf{B}$ um elemento desse espaço. Resumindo, se $\mathbf{L}: E \rightarrow E$ é linear, $\mathbf{B} \in E$ e $\tilde{\mathbf{y}} \in E$ é uma solução de $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$, então a solução geral de $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{B}$ é dada por $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}$ onde $\mathbf{u}$ é a solução geral da equação homogénea $\mathbf{L}\mathbf{u} = 0$.