

24.1 Sistemas de equações diferenciais

24.1.1 Definição

Considere-se $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua no conjunto aberto D

Vamos considerar a seguinte equação diferencial ordinária vectorial de 1ª ordem:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

(onde a incógnita y é uma função de variável real - i. e. em $\mathbb{R}$ - com valores em $\mathbb{R}^n$).

Uma vez que f tem n funções coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funções de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ - tal como y tem n funções coordenadas $y_1, y_2, \dots, y_n$ - funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ - a equação acima é um **sistema de equações diferenciais**:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Uma condição inicial $y(t_0) = y_0$ é um conjunto de n condições:

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{01} \\ y_2(t_0) &= y_{02} \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_{0n} \end{aligned}$$

Exemplo 24.1 *O seguinte sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 + x \sin z + y \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y \cos t \\ \frac{dz}{dt} = xy - 2e^{t^2} \end{cases} \quad \text{com as condições iniciais } x(1) = 0, y(1) = 0 \text{ e } z(1) = \pi$$

pode ser escrito na forma $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(t, \mathbf{y})$ com a condição $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, onde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$e f(t, \mathbf{y}) = f(t, x, y, z) = \left(y^2 + x \sin z + y \sin t, \quad x^2 + y \cos t, \quad xy - 2e^{t^2} \right)$$

24.1.2 Teorema de Picard-Lindelöf

O enunciado e a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf ficam formalmente inalterados (substitui-se apenas o módulo pela norma em $\mathbb{R}^n$ e considera-se y com valores em $\mathbb{R}^n$) quando se consideram equações vectoriais generalizando as equações escalares.

Teorema 24.1 (Teorema de Picard-Lindelöf) *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $(t_0, y_0) \in D$, tais que*

a) *f é contínua em D*

b) *$f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D .*

I. e. , para cada ponto $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e $L > 0$ tal que para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes¹ a D

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Então o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y(t)$ (de classe C^1) definida numa vizinhança de t_0 .

24.2 Sistemas lineares escritos na forma matricial

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante (não depende de t) e $\mathbf{B}(t)$ é uma função com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, na nossa notação, com valores nas matrizes $n \times 1$). Se $\mathbf{B}(t) \equiv 0$, diz-se que a equação é homogénea.

Exemplo 24.2 *Considere-se o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + y - e^t \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z - 2e^t \end{cases}$$

com as condições iniciais $x(0) = y(0) = z(0) = 1$. (Facilmente se obtém, por integração sucessiva, que $x(t) = y(t) = z(t) = e^t$). Este sistema pode ser escrito na seguinte forma matricial $\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$:

¹Note-se que (t, y_1) e (t, y_2) têm a mesma primeira coordenada.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e^t \\ -2e^t \end{bmatrix}.$$

A equação homogénea associada é $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ correspondendo ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}.$$

No que se segue iremos primeiramente considerar sistemas homogéneos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante.

A solução geral no caso $n = 1$, é

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}.$$

Vamos ver que esta expressão continua a fazer sentido no caso $n \neq 1$.

24.3 Exponencial de matrizes

24.3.1 Definição de exponencial

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada, então o exponencial desta matriz é definida por.

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{Id} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

24.3.2 Convergência da série que define o exponencial

Pode-se mostrar $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ existe qualquer que seja a matriz $\mathbf{A}$. Ou seja que para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$ o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

existe². Ou seja existe o limite de cada uma das entradas da matriz $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$.

²De facto se M for um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}$, então $M^k n^{k-1}$ é um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}^k$ ($k \geq 1$), onde n é a dimensão da matriz $\mathbf{A}$. Então $M^k n^k$ é um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}^k$ ($k \geq 0$) e e^{Mn} é um majorante do módulo das entradas da matriz $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$. Pelo que as séries que definem cada uma das entradas de $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ são absolutamente convergentes.

24.3.3 Exemplo

Exemplo 24.3 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e por indução mostra-se que

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } k \geq 1.$$

Então, de acordo com a definição de exponencial de uma matriz, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k & \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k - 1 \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da mesma forma, com $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

24.4 Funções matriciais

24.4.1 Definições

Vamos trabalhar com matrizes $\mathbf{A}$ em que cada uma das suas entradas $[a_{ij}]$ é uma função de variável real. Dizemos funções matriciais de variável real.

Se as entradas da matriz $\mathbf{A}$ são $[a_{ij}]$, então as entradas de $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ são $\left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$; as entradas de $\int \mathbf{A} dt$ são $[\int a_{ij} dt]$; as entradas de $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{A} dt$ são $\left[\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} a_{ij} dt\right]$. A matriz $\mathbf{A}$ diz-se contínua (diferenciável; integrável; primitivável; etc...) se as suas entradas $[a_{ij}]$ forem todas elas funções contínuas (diferenciáveis; integráveis; primitiváveis; etc...).

24.4.2 Propriedades

Proposição 24.2 *Se $\mathbf{C}$ é uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{D}$ é uma matriz $p \times n$, então*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CD}) = \frac{d\mathbf{C}}{dt}\mathbf{D} + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{CD})\right)_{ij} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^p (\mathbf{C})_{ik} (\mathbf{D})_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\frac{d(\mathbf{C})_{ik}}{dt} (\mathbf{D})_{kj} + (\mathbf{C})_{ik} \frac{d(\mathbf{D})_{kj}}{dt} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{d(\mathbf{C})_{ik}}{dt} (\mathbf{D})_{kj} + \sum_{k=1}^p (\mathbf{C})_{ik} \frac{d(\mathbf{D})_{kj}}{dt} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt}\mathbf{D}\right)_{ij} + \left(\mathbf{C}\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)_{ij} \end{aligned}$$

■

24.5 Derivada de uma exponencial

Teorema 24.3 *Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada **constante**. Então a função matricial $\mathbf{E}(t) = e^{t\mathbf{A}}$ satisfaz as seguintes propriedades*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) = \mathbf{A}\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} \quad e \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{Id}$$

onde $\mathbf{Id}$ representa matriz identidade.

Demonstração. Cada uma das entradas da matriz $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ é uma série de potências (convergente para todo o t) que pode portanto ser derivada termo a termo. Temos então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} \mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^{k+1}\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^{k+1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^{k+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \right) \mathbf{A} = \mathbf{A} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \right) \\ &= \mathbf{E}(t) \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{E}(t).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{Id} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots$$

Pelo que $\mathbf{E}(0) = \mathbf{Id}$. ■

Observação 24.1 Como consequência imediata temos

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{E}}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(t)\mathbf{A} \quad e \quad \tilde{\mathbf{E}}(t_0) = \mathbf{Id}$$

se $\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}$.

Corolário 24.4 $(\mathbf{e}^{\mathbf{A}})^{-1} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}}$

Demonstração. Considere a função matricial

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}.$$

Temos de acordo com os resultados precedentes: _

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{D}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \right) \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} + \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \right) \\ &= -\mathbf{A} \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} + \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \mathbf{A} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto todas as entradas desta matriz são funções constantes porque as suas derivadas são nulas, ou seja a matriz $\mathbf{D}(t)$ é constante. Então

$$\mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}(0) = \mathbf{Id}$$

■