

23.1 Teorema de Picard-Lindelöf

Teorema 23.1 (de Picard-Lindelöf) *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0) \in D$, tais que*

a) *f é contínua em D*

b) *$f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D .*

I. e. , para cada ponto $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e $L > 0$ tal que para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes¹ a V

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Então o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y(t)$ e esta está definida numa vizinhança² de t_0 .

A próxima proposição mostra que a condição b) no Teorema de Picard-Lindelöf, pode ser substituída por outra menos geral, mas de mais fácil de verificação prática. Em particular, se $f(t, y)$ é de classe C^1 em D , então está nas condições do Teorema.

Proposição 23.2 *Se $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ é uma função contínua num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então $f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D .*

Demonstração. Dado $(t, y) \in D$, seja V uma vizinhança limitada de (t, y) tal que $\overline{V} \subset D$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, tem um máximo em no compacto $\overline{V}$. Então pelo teorema do valor intermédio (a uma variável - y) temos para $(t, y_1), (t, y_2) \in \overline{V}$, com $\theta \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_1 + \theta(y_1 - y_2)) \right| |y_1 - y_2| \\ &\leq \max_{\overline{V}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Portanto, para cada ponto $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e $L = \max_{\overline{V}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ tal que para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes a V

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

■

¹Note-se que (t, y_1) e (t, y_2) têm a mesma primeira coordenada.

²I.e. definida pelo menos para $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, para certo $\varepsilon > 0$.

23.1.1 Demonstração da existência

O Teorema de Picard-Lindelöf contém duas afirmações: a existência da solução e a sua unicidade. Vamos começar por demonstrar a existência construindo explicitamente a solução como o limite de uma sucessão de funções.

Construção da sucessão $y_n(t)$: Começamos por reparar que o PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0, \quad (23.1)$$

é equivalente à seguinte equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (23.2)$$

Ou seja, $y(t)$ é uma solução contínua de (23.1) sse é uma solução contínua de (23.2). Note-se que uma solução contínua de qualquer dos problemas é uma função continuamente diferenciável (i. e. de classe C^1). De facto se $y(t)$ é contínua, então por composição de funções contínuas temos que $f(t, y(t))$ é contínua; pelo que $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ é contínua, e $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$, sendo o integral indefinido de uma função contínua, tem derivada contínua.

Defina-se por recorrência a seguinte sequência de funções $y_n(t)$:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Em apêndice mostramos que $y_n(t)$ converge uniformemente em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para certo $\varepsilon > 0$ que depende das características da função f .

Convergência uniforme da sucessão $y_n(t)$: Ver apêndice.

Conclusão: Uma vez que a sucessão $y_n(t)$ é uniformemente convergente, digamos $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$, concluímos que a função limite $y(t)$ é contínua.

Por outro lado, como $(t, y_n(t))$ está numa vizinhança de (t_0, y_0) quando $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, temos

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))| \leq L |y_n(t) - y(t)|,$$

(usando a propriedade de f ser localmente lipschitziana, $\varepsilon > 0$ foi escolhido suficientemente pequeno de forma que tal acontecesse). Pelo que a convergência $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) = f(t, y(t))$ também é uniforme em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Então, podemos comutar a operação de limite com a integração, obtendo-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds \right) = y_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, y_n(s)) \, ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Pelo que $y(t)$ é solução do problema (23.2), e portanto, a solução do PVI (23.1) que queríamos demonstrar que existia.

23.2 Lema de Gronwall

Para terminar a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf, falta agora provar que a solução que determinamos é única. Para conseguir este objectivo necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 23.3 (Lema de Gronwall) *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, L um real positivo, $t_0 \in I$ e $u(t)$ uma função tal que:*

a) u é contínua em I .

b) $\forall t \in I, \quad u(t) \geq 0$.

c) $\forall t \in I, \quad u(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|$.

Então $\forall t \in I, \quad u(t) = 0$.

Demonstração. Seja $U(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds$.

1) Para $t \geq t_0$ temos $U(t) \geq 0$ e a condição c) escreve-se $\frac{dU}{dt} = u \leq L U$.

Donde $\frac{dU}{dt} e^{-L(t-t_0)} - L U e^{-L(t-t_0)} \leq 0$ ou seja $\frac{d}{dt} (U e^{-L(t-t_0)}) \leq 0$. Integrando esta relação entre t_0 e t obtemos $U(t) e^{-L(t-t_0)} - U(t_0) \leq 0$ e como $U(t_0) = 0$ vem $U(t) \leq 0$.

Pelo que, para $t \geq t_0$, obtemos $U(t) = 0$.

2) De modo análogo para $t \leq t_0$ temos $U(t) \leq 0$ e a condição c) escreve-se $\frac{dU}{dt} = u \leq -L U$.

Donde $\frac{dU}{dt} e^{L(t-t_0)} + L U e^{L(t-t_0)} \leq 0$, ou seja $\frac{d}{dt} (U e^{L(t-t_0)}) \leq 0$. Integrando esta relação entre t e t_0 ($t \leq t_0$) obtemos $U(t_0) - U(t) e^{L(t-t_0)} \leq 0$, e como $U(t_0) = 0$, vem $U(t) \geq 0$.

Pelo que, para $t \leq t_0$, obtemos ainda $U(t) = 0$.

3) Finalmente, como a função $U(t)$ é constante a sua derivada $u(t)$ é a função nula. ■

23.3 Demonstração da unicidade no Teorema 23.1

Se $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ são soluções do problema (23.1) num certo intervalo I e portanto soluções de (23.2) podemos pôr

$$y(t) - \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \tilde{y}(s)) ds$$

pelo que, usando a hipótese de $f(t, y)$ ser localmente lipschitziana em relação a y em D , obtém-se

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |y(s) - \tilde{y}(s)| ds. \end{aligned}$$

Então a função $u(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)|$ satisfaz as condições do Lema de Gronwall concluindo-se $y(t) = \tilde{y}(t)$ (para qualquer t suficientemente próximo de t_0 - para se poder usar sempre a mesma vizinhança onde $f(t, y)$ é lipschitziana); ou seja: numa vizinhança de t_0 só existe uma solução do problema (23.1).

23.4 Prolongamento de soluções

O seguinte teorema precisa o conceito de **intervalo máximo de definição** que já utilizamos anteriormente de uma forma intuitiva. Afirma que a solução pode ser prolongada enquanto não sair do domínio D aonde as condições do Teorema de Picard-Lindelöf são satisfeitas. Em particular quando $D = \mathbb{R}^2$, as soluções podem ser prolongadas até que expludam (i. e. até que a solução ou a sua derivada deixem de ser limitadas).

Teorema 23.4 *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

a) *f é contínua em D*

b) *$f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D .*

Seja ainda (pelo Teorema de Picard-Lindelöf) $y(t)$ tal para certo intervalo aberto³ I , se tenha

$$\forall t \in I \quad \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)).$$

*Então existe um **intervalo máximo de definição** $]a, b[\supset I$, tal que $y(t)$ admite um prolongamento a este intervalo de tal forma que*

$$\forall t \in]a, b[\quad \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t))$$

e verifica-se obrigatoriamente pelo menos uma das seguintes propriedades caracterizando o ponto b (respectivamente, o ponto a):

- i) $b = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
- ii) $y(t)$ não é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b (resp. à direita do ponto a).
- iii) $\frac{dy}{dt}(t)$ não é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b (resp. à direita de a).
- iv) $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) \equiv \beta$ existe em $\mathbb{R}$, mas $(b, \beta) \in \partial D$ (resp. $\lim_{t \rightarrow a^+} y(t) \equiv \alpha \in \mathbb{R}$ e $(a, \alpha) \in \partial D$)⁴.

³Obviamente que o intervalo aberto I tem ser tal que $\{(t, y(t)) : t \in I\} \subset D$.

⁴Onde ∂D designa a fronteira de D ; como D é aberto, está-se a afirmar que $(b, \beta) \notin D$ (resp. $(a, \alpha) \notin D$).

23.5 Comparação de soluções

Apesar de muitas vezes não ser possível determinar exactamente e explicitamente as soluções de certas equações diferenciais é muitas vezes possível uma análise rigorosa comparando as soluções desconhecidas com soluções de equações diferenciais que sabemos resolver explicitamente.

Exemplo 23.1 Considere-se o PVI: $\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2$ com $y(1) = 0$.

Temos, para $t > 1$, $\frac{dy}{dt} \geq y^2 + 1$, ou seja $\frac{1}{y^2 + 1} \frac{dy}{dt} \geq 1$. E, se $t > 1$, vem $\arctg y(t) - \arctg 0 \geq t - 1$ e ainda $y(t) \geq \tg(t - 1)$. Como $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} + 1} \tg(t - 1) = +\infty$, concluímos que existe $t_1 \in]1, \frac{\pi}{2} + 1]$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = +\infty$, i.e. a solução $y(t)$ do problema de valor inicial considerado explode⁵.

Para sistematizar este tipo de raciocínios vamos enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 23.5 Sejam $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto e as funções $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas em D e tais que pelo menos uma delas é localmente lipschitziana em relação a y em D . Suponha-se ainda que (para $(t, y) \in D$) $f(t, y) \leq g(t, y)$.

Dados (t_0, u_0) e (t_0, v_0) tais que $(t_0, u_0) \in D$, $(t_0, v_0) \in D$ e $u_0 \leq v_0$, considerem-se $u(t)$ e $v(t)$ soluções dos seguinte problemas

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \quad \text{com} \quad u(t_0) = u_0 \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = g(t, v) \quad \text{com} \quad v(t_0) = v_0$$

respectivamente, ambas definidas no intervalo $[t_0, b[$ com $b > t_0$. Então:

$$\forall t \in [t_0, b[\quad u(t) \leq v(t).$$

Demonstração. Considere-se por absurdo que para certos⁶ t_1 e t_2 tais que $t_1, t_2 \in [t_0, b[$, $t_1 < t_2$ se tem

$$u(t_1) = v(t_1) \quad \text{e} \quad u(t) > v(t) \quad \text{para } t \in]t_1, t_2[.$$

Vamos supor que é a função g que é localmente lipschitziana em relação a y em D (a demonstração no caso de ser f a função localmente lipschitziana é análoga). Então existe uma vizinhança V do ponto $(t_1, v(t_1))$ tal que para quaisquer $(t, y_1), (t, y_2) \in V$ se tem

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Usando a continuidade das soluções, seja $\tilde{t}_2 \in]t_1, t_2[$ tal que para $t \in]t_1, \tilde{t}_2[$ se tenha $(t, u(t)) \in V$ e $(t, v(t)) \in V$. Então para $t \in]t_1, \tilde{t}_2[$ temos⁷

⁵Podemos concluir com um raciocínio semelhante, que todas as soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2$ explodem.

⁶Mais rigorosamente $t_1 = \inf \{t > t_0 : u(t) > v(t)\}$ e $t_2 = \inf (\{t > t_1 : u(t) \leq v(t)\} \cup \{b\})$.

⁷No caso de ser f a função localmente lipschitziana usamos de forma análoga:

$$u(t) - v(t) = \int_{t_1}^t (f(s, u(s)) - g(s, v(s))) \, ds \leq \int_{t_1}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \, ds.$$

$$\begin{aligned}
u(t) - v(t) &= u(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, u(s)) \, ds - v(t_1) - \int_{t_1}^t g(s, v(s)) \, ds \\
&= \int_{t_1}^t (f(s, u(s)) - g(s, v(s))) \, ds \leq \int_{t_1}^t (g(s, u(s)) - g(s, v(s))) \, ds \\
&\leq L \int_{t_1}^t (u(s) - v(s)) \, ds
\end{aligned}$$

Então pelo Lema de Gronwall concluímos que $u(t) - v(t) = 0$ para todo $t \in]t_1, \tilde{t}_2[$, contrariamente à hipótese. ■

Exemplo 23.2 Considere-se o PVI: $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{e^y + \cos^2 t}$ com $y(0) = 0$.

Vamos considerar a seguinte majoração do campo: $\frac{t^2}{e^y + \cos^2 t} \leq \frac{t^2}{e^y}$ e o seguinte PVI

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t^2}{e^v} \quad \text{com} \quad v(0) = 0$$

Temos então, pelo Teorema de Picard Lindelöf, que cada um destes problemas define uma única solução, $y(t)$ e $v(t)$ respectivamente. E pela proposição anterior vem, para $t \geq 0$: $y(t) \leq v(t)$. Mas a equação que define $v(t)$ é separável e fácil de resolver, obtendo-se sucessivamente (para $t \geq 0$)

$$e^v \frac{dv}{dt} = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^v = \frac{t^3}{3} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \log \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right).$$

Por outro lado como $\frac{t^2}{e^y + \cos^2 t} \geq 0$ concluímos que $y(t)$ é crescente. Portanto $0 \leq y(t) \leq \log \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right)$, em particular pode-se concluir que $y(t)$ não explode para $t \geq 0$ e consequentemente o seu intervalo de definição contém o intervalo $[0, +\infty[$.

Podemos agora utilizar a desigualdade $y(t) \leq \log \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right)$ em $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{e^y + \cos^2 t}$, para obter

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{t^2}{e^{\log \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right)} + \cos^2 t} = \frac{t^2}{\frac{t^3}{3} + 1 + \cos^2 t} \geq \frac{t^2}{\frac{t^3}{3} + 2}.$$

Integrando entre 0 e t esta última desigualdade, obtemos $y(t) \geq \log \left(\frac{t^3}{3} + 2 \right) - \log 2$. Portanto, apesar de não conseguirmos obter a solução $y(t)$, deduzimos a seguinte estimativa:

$$\log \left(\frac{t^3}{6} + 1 \right) \leq y(t) \leq \log \left(\frac{t^3}{3} + 1 \right) \quad \text{para } t \geq 0.$$

Apêndice

23.A.1. Convergência uniforme da sucessão $y_n(t)$

Uma vez que f é localmente lipschitziana, seja $\delta > 0$ e $L > 0$ tais que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D$, e para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ se tenha

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Sendo f uma função contínua, podemos concluir que existe o máximo da função $|f(t, y)|$ no quadrado $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ que designaremos pela letra M . Defina-se então $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \delta$, $\varepsilon M < \delta$ e $\varepsilon L < 1$.

Então podemos mostrar por indução que cada uma das funções $y_n(t)$ satisfaz a relação $|y_n(t) - y_0| < \delta$, se $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. De facto esta propriedade é obviamente verdadeira para $y_0(t)$; e supondo por hipótese de indução a sua veracidade para $y_n(t)$, obtemos (porque sabemos que $|y_n(t) - y_0| < \delta$ para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$)

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s))| \, ds \right| \leq |t - t_0| M \leq \varepsilon M \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n+1}(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s))) \, ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t |y_{n+1}(s) - y_n(s)| \, ds \right| \\ &\leq L |t - t_0| \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|, \end{aligned}$$

onde I designa o intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Vem então

$$\max_{t \in I} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| \leq L\varepsilon \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|,$$

e por indução obtemos

$$\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq (L\varepsilon)^n \max_{t \in I} |y_1(t) - y_0(t)|.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|} \leq L\varepsilon < 1,$$

e concluímos (pelo critério da raiz e pelo critério de Weierstrass) que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)),$$

é uniformemente convergente. Mas, nesse caso, o seguinte limite existe e a sua convergência é uniforme em I ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)).$$

23.A.2. Demonstração do Teorema 23.4

Demonstração. A demonstração divide-se em três partes, a saber: 1. primeiro mostra-se a existência de um intervalo de definição máximo (que corresponde a algo muito intuitivo e que não envolve raciocínios elaborados, contudo exige um elevado nível de abstracção); 2. seguidamente mostra-se que quando nenhuma das três primeiras propriedades se verifica então existe $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$ (resp. $\lim_{t \rightarrow a^+} y(t)$); 3. por fim, prova-se por contradição simples que estes limites quando existem não podem pertencer a D .

Pelo Teorema de Picard-Lindelöf, da solução $y(t)$ dada necessitamos apenas de conhecer um valor $t_0 \in I$ e $y_0 = y(t_0)$, que vamos fixar para iniciar a primeira parte da demonstração.

1. Seja $C^1(D)$ o conjunto das funções de classe C^1 que têm o seu gráfico contido em D , i.e.

$$C^1(D) = \bigcup_{\substack{t_a, t_b \in \mathbb{R} \\ t_a < t_b}} C^1(]t_a, t_b[: D)$$

onde $C^1(]t_a, t_b[: D)$ é o conjunto das funções $\psi(t)$ com domínio $]t_a, t_b[$, diferenciáveis neste intervalo e com derivada contínua, tais que para todo $t \in]t_a, t_b[$ se tem $(t, \psi(t)) \in D$. Dada uma função $\psi \in C^1(D)$, designe-se por $\mathbf{I}(\psi)$ o seu domínio (que é sempre um intervalo aberto). Defina-se agora o conjunto de soluções

$$S = \left\{ \psi \in C^1(D) : t_0 \in \mathbf{I}(\psi) \wedge \psi(t_0) = y_0 \wedge \forall t \in \mathbf{I}(\psi) \quad \frac{d\psi}{dt}(t) = f(t, \psi(t)) \right\},$$

e o **intervalo máximo de definição**

$$]a, b[= \bigcup_{\psi \in S} \mathbf{I}(\psi).$$

Sejam $\psi, \tilde{\psi} \in S$, então pelo resultado de unicidade do Teorema de Picard-Lindelöf obtemos $\psi(t) = \tilde{\psi}(t)$ para qualquer⁸ $t \in \mathbf{I}(\psi) \cap \mathbf{I}(\tilde{\psi})$. Portanto, para cada $t \in]a, b[$ podemos definir $y(t) = \psi(t)$, onde ψ é qualquer função pertencente a S tal que $t \in \mathbf{I}(\psi)$. Esta função $y(t)$ está então bem definida em $]a, b[$ e é a extensão máxima⁹ em D da solução do problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ com $y(t_0) = y_0$.

2. Sendo $]a, b[$ o intervalo máximo de definição atrás definido, suponha-se que não se verificam para b nenhuma das propriedades i), ii) e iii). Portanto $b \in \mathbb{R}$, $y(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b e $\frac{dy}{dt}(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b .

⁸De facto, se por absurdo fosse $\psi(t_2) \neq \tilde{\psi}(t_2)$ para certo $t_2 \in \mathbf{I}(\psi) \cap \mathbf{I}(\tilde{\psi})$, definindo $t_1 = \inf \{t : t > t_0 \text{ e } \psi(t) \neq \tilde{\psi}(t)\}$ se $t_2 > t_0$ ou $t_1 = \sup \{t : t < t_0 \text{ e } \psi(t) \neq \tilde{\psi}(t)\}$ se $t_2 < t_0$, obtínhamos, por continuidade, que ψ e $\tilde{\psi}$ eram soluções localmente distintas do seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_1) = \psi(t_1) = \tilde{\psi}(t_1),$$

contrariando o Teorema de Picard-Lindelöf.

⁹Mais precisamente, $y \in S$ e qualquer outra função $\psi \in S$ é uma restrição da função y .

Das duas primeiras hipóteses concluímos que ou existe $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$, ou existem dois sublimites distintos de $y(t)$ quando $t \rightarrow b^-$. Sejam então β_1 e β_2 dois sublimites de $y(t)$ quando $t \rightarrow b^-$. Portanto, existem sucessões r_n e s_n , ambas convergentes para b por valores à esquerda deste ponto tais que

$$\lim_{r_n \rightarrow b^-} y(r_n) = \beta_1 \quad \text{e} \quad \lim_{s_n \rightarrow b^-} y(s_n) = \beta_2.$$

Mas como $\frac{dy}{dt}(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b , digamos $\left| \frac{dy}{dt}(t) \right| \leq M$, temos

$$|y(r_n) - y(s_n)| = \left| \int_{s_n}^{r_n} \frac{dy}{dt}(t) dt \right| \leq |r_n - s_n| M,$$

pelo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(r_n) - y(s_n)| = 0,$$

ou seja $\beta_1 = \beta_2$. Concluindo-se a existência do limite $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$.

Com um raciocínio simétrico conclui-se do mesmo modo, que quando não se verificam para o ponto a nenhuma das propriedades i), ii) e iii), então existe $\lim_{t \rightarrow a^+} y(t)$.

3. Se por absurdo

$$\lim_{t \rightarrow b^-} (t, y(t)) = (b, \beta)$$

com $b \neq +\infty$, $|\beta| \neq +\infty$ e $(b, \beta) \in D \setminus \partial D$ (note-se que $(t, y(t)) \in D$ para qualquer $t \in]a, b[$ e portanto por continuidade (b, β) não pode pertencer ao exterior de D). Então pelo Teorema de Picard-Lindelöf o problema de valor inicial $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ com $u(b) = \beta$ tem solução $u(t)$ definida num intervalo $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ para certo $\varepsilon > 0$. Considerando

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{se } t \in]a, b[\\ u(t) & \text{se } t \in [b, b + \varepsilon[\end{cases}$$

Temos que obviamente $\tilde{y}$ é contínua e como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{dy}{dt} &= \lim_{t \rightarrow b^-} f(t, y(t)) = f(b, \beta) = \lim_{t \rightarrow b^+} f(t, u(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow b^+} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

concluímos pelo Teorema de Lagrange que $\tilde{y}$ é diferenciável em $t = b$ e portanto uma solução do problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ com $y(t_0) = y_0$. Obtemos então uma contradição com o facto de $]a, b[$ ser o intervalo de definição máximo.

Com um raciocínio simétrico conclui-se do mesmo modo, que é absurdo que

$$\lim_{t \rightarrow a^+} (t, y(t)) = (a, \alpha)$$

com $a \neq +\infty$, $|\alpha| \neq +\infty$ e $(a, \alpha) \in D \setminus \partial D$. ■