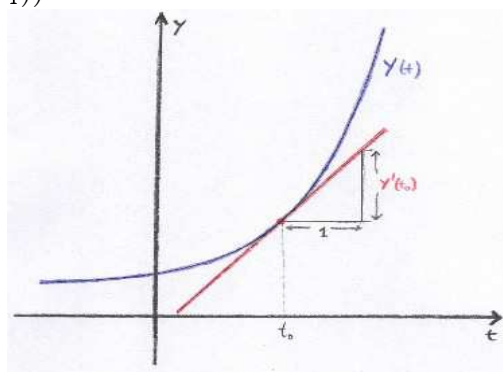


22.1 Traçado de campos de direcções

22.1.1 Interpretação geométrica de uma equação diferencial

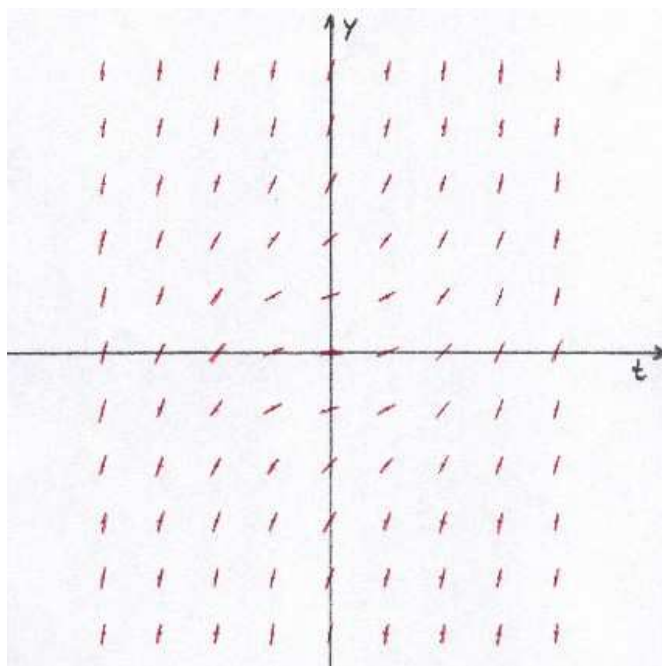
Como se indica num gráfico de uma função $y(t)$ o valor da derivada desta função num certo ponto t_1 ? Pela inclinação da recta tangente (tendo esta a direcção do vector $(1, \frac{dy}{dt}(t_1))$ e passando pelo ponto $t_1, y(t_1)$).



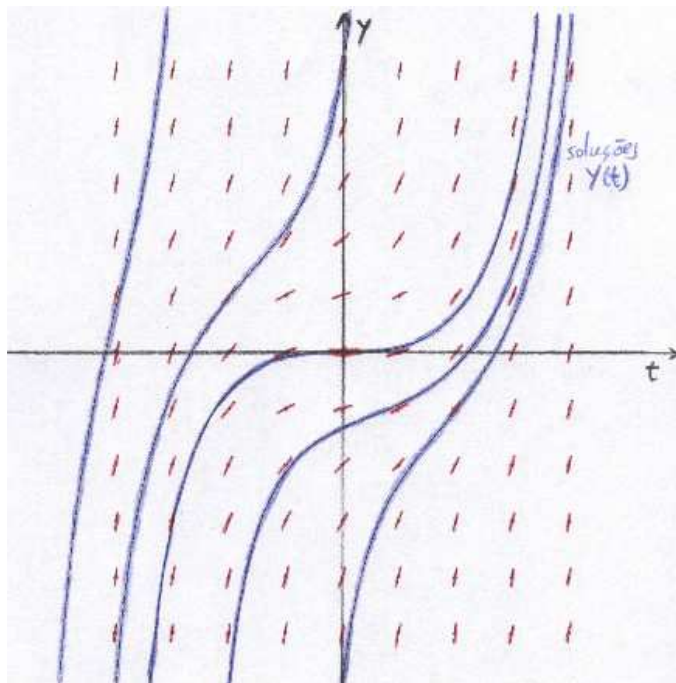
Uma equação diferencial (ordinária, escalar de 1ª ordem), que se pode descrever na forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

define então um **campo de direcções** $(t, y) \rightarrow (1, f(t, y))$ ou seja $(t, y) \rightarrow \left(1, \frac{dy}{dt}\right)$ que pode se representado graficamente; traçando um pequeno segmento com a inclinação $f(t, y)$ em cada ponto (t, y) de um reticulado:



As soluções da equação diferencial são funções tangentes a este campo; o gráfico de cada solução tem cada ponto uma recta tangente com a direcção determinada pelo campo de direcções.



22.1.2 Representação gráfica de campos de direcções

Com a ajuda de um computador é fácil representar graficamente um campo de direcções, construindo um reticulado e marcando em cada vértice deste um pequeno segmento de recta com a direcção calculada para esse ponto. No entanto, é possível obter uma boa aproximação gráfica dum campo de direcções, sem a necessidade de realizar uma grande quantidade de cálculos como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo Considere-se a equação

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2$$

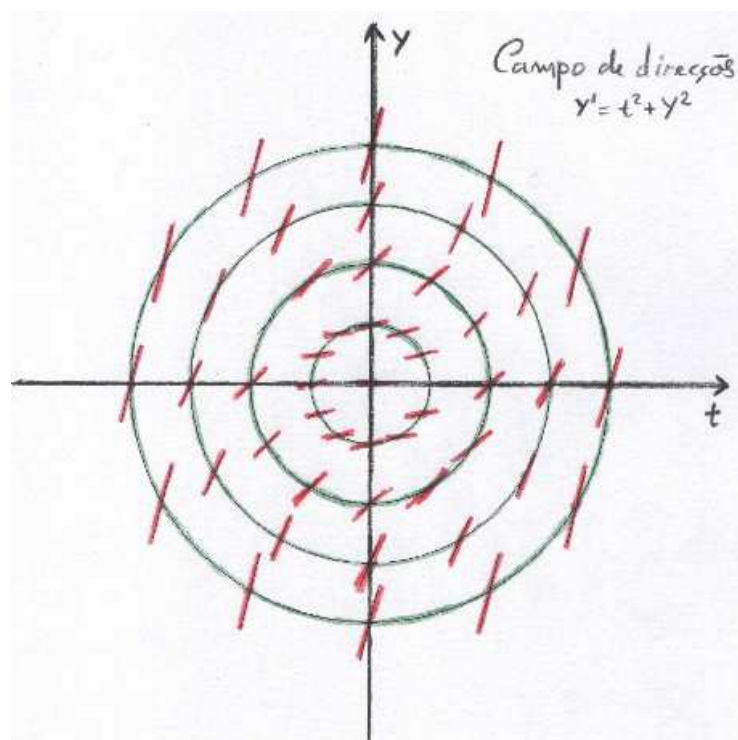
(uma equação que não pode ser resolvida através dos métodos que aprendemos e que não tem solução elementar).

A ideia é representar, como curvas auxiliares, as linhas aonde o campo de direcções é constante igual a um valor dado.

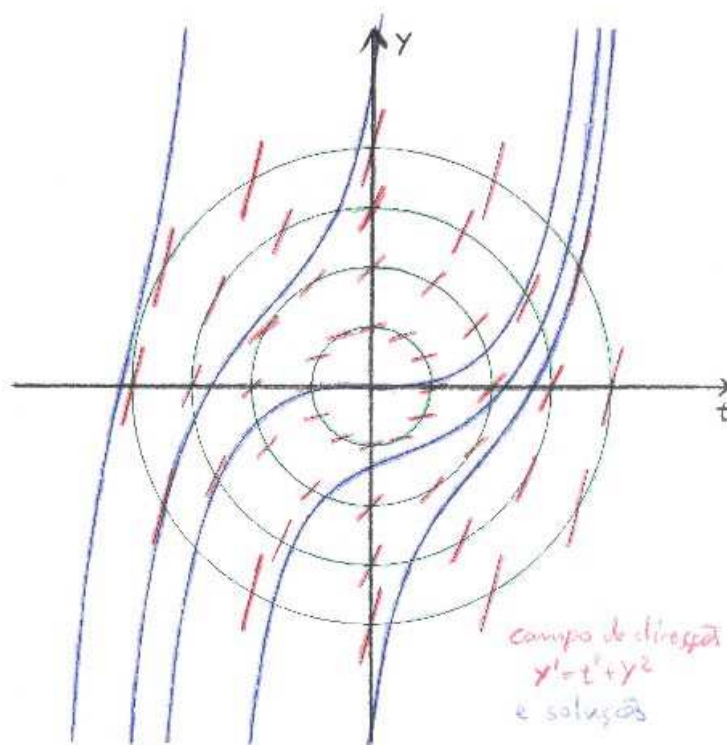
Represente-se por exemplo, as curvas aonde o campo tem inclinação igual a $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{9}{4}$ e 4:

$$y^2 + t^2 = \frac{1}{4}, \quad y^2 + t^2 = 1, \quad y^2 + t^2 = \frac{9}{4}, \quad y^2 + t^2 = 4.$$

Podemos agora sobre estas curvas marcar pequenos segmentos de recta com inclinações $\frac{1}{4}$, 1 , $\frac{9}{4}$ e 4 , respectivamente:



Desenhando curvas tangentes a este campo, podemos ter uma ideia sobre o gráfico das soluções da equação diferencial:



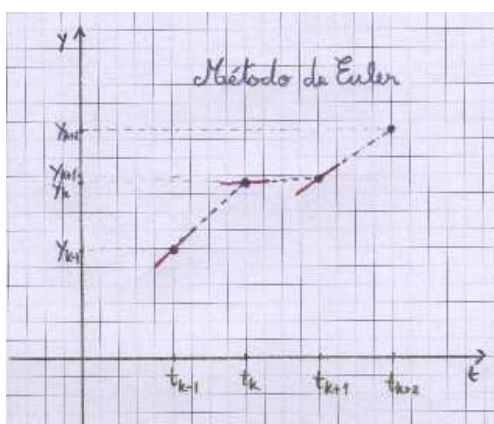
22.2 Método de Euler na aproximação de EDO's

Métodos numéricos para a determinação de soluções de EDO's podem ser analisados nesta representação geométrica (campo de direcções). O método mais ingénuo, mas eficaz em inúmeras situações, é o Método de Euler:

Considera-se um PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0.$$

Definem-se os tempos $t_k = t_0 + kh$, onde $h > 0$ é um passo constante e k um inteiro. Pretende-se calcular valores aproximados y_k do valor da solução $y(t_k)$. Conhecido o par (t_k, y_k) , aproxima-se o gráfico da solução $y(t)$ no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ por um segmento de recta com inclinação dada por $f(t_k, y_k)$.



O valor aproximado y_{k+1} pode então ser calculado por

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k).$$

A sequência y_k é assim obtida por recorrência. Os pontos $\{(t_k, y_k) : k = 0, 1, \dots, N\}$ serão então uma aproximação (discreta) do gráfico da solução procurada $\{(t, y(t)) : t \in [0, Nh]\}$.

22.3 Problema da existência e unicidade

22.3.1 Exemplo 1 (inexistência)

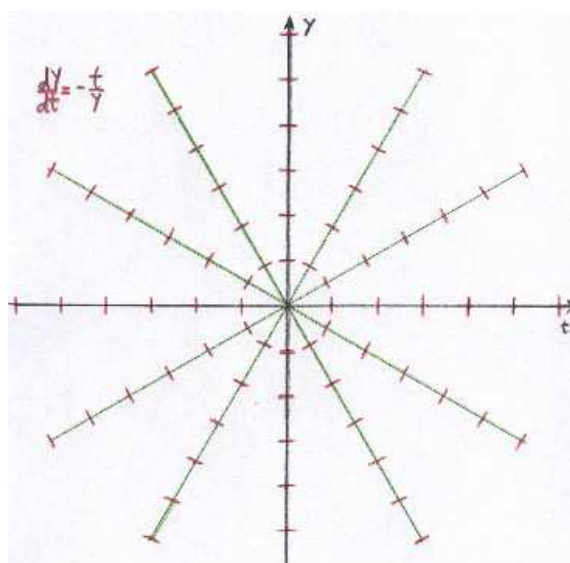
Considere-se a equação diferencial

$$y \frac{dy}{dt} = -t.$$

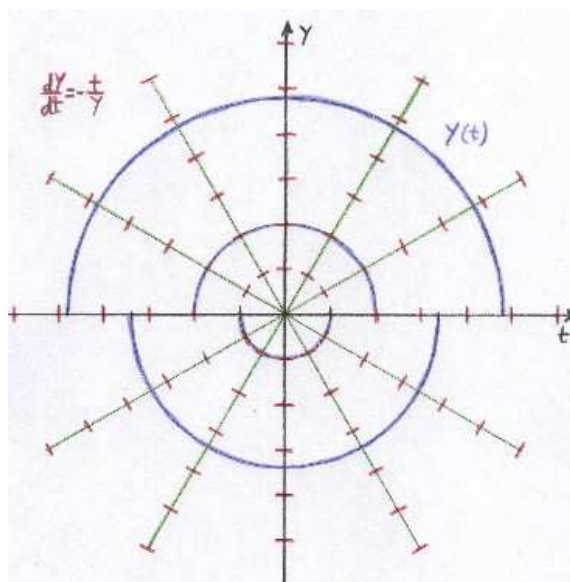
Para $y \neq 0$, temos $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$. As curvas aonde o campo de direcções é constante igual a m , são as rectas que passam na origem

$$y = -\frac{1}{m}t.$$

obtemos assim o seguinte esboço do campo de direcções:



e podemos ter uma ideia das soluções:



Facilmente confirmamos estas figuras uma vez que a equação dada é separável e as soluções $y(t)$ satisfazem a $y^2 + t^2 = c$, obtendo-se as soluções $y(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$.

Verificamos que o problema

$$y \frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(1) = 0,$$

não tem nenhuma solução definida num intervalo aberto que contenha o instante inicial $t_0 = 1$ (embora se possa pensar numa função definida em $[-1, 1]$ generalizando o conceito de solução). E que o problema

$$y \frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(0) = 0,$$

também não tem solução (não sendo possível, neste caso, generalizar o conceito de solução).

22.3.2 Exemplo 2 (multiplicidade de soluções)

Considere-se o problema

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{|1 - y^2|} \quad \text{com} \quad y(0) = -1.$$

Facilmente se descobre a solução $y(t) \equiv -1$. Mas será que esta solução é única?

Para simplificar esta análise considere-se $|y| \leq 1$ e portanto a equação:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2}$$

Para condições iniciais tais que $y \neq -1$ e $y \neq 1$ obtemos: $\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{dy}{dt} = 1$. Donde

$$\arcsen y = t + c \quad \text{para} \quad (t + c) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$y = \sin(t + c) \quad \text{para} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right].$$

Mas esta solução não explode para $t = -\frac{\pi}{2} - c$ ou $t = \frac{\pi}{2} - c$, pelo que pode ser prolongada. Obtemos então as seguintes soluções

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leq -\frac{\pi}{2} - c \\ \sin(t + c) & \text{se } -\frac{\pi}{2} - c \leq t \leq \frac{\pi}{2} - c \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} - c \leq t \end{cases}$$

Pelo que existem infinitas soluções do nosso problema; basta tomar na expressão acima qualquer $c \leq -\frac{\pi}{2}$ para obtermos uma solução da equação diferencial que satisfaz $y(0) = -1$.

Façamos um esboço do campo de direcções e das soluções:

