

20.1 Equações exactas

20.1.1 Da solução à equação

De acordo com os exemplos anteriores, consideramos que determinámos a solução $y(t)$ de uma equação diferencial escalar de primeira ordem quando chegamos a uma relação

$$\varphi(t, y) = c = \varphi(t_0, y_0)$$

que define implicitamente $y(t)$ (o teorema da função implícita pode ser usado se $\varphi \in C^1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$). Tentemos agora, por raciocínio inverso, redescobrir a equação diferencial:

Temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, y(t)) = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t)) \frac{dy}{dt}(t) = 0.$$

Portanto $y(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Será que esta era a equação inicial? Como iremos ver pode ser que não.

No entanto, concluímos que dada uma equação da forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

e a condição inicial

$$y(t_0) = y_0,$$

com $\varphi \in C^1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$, então a solução é dada implicitamente por

$$\varphi(t, y) = c = \varphi(t_0, y_0) \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0.$$

20.1.2 Solução de equações exactas

Considere-se agora uma equação geral da forma

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Pela análise anterior, conseguimos resolver esta equação se existir uma função $\varphi \in C^1$ com $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$ tal que

$$M(t, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y),$$

ou seja se o campo (M, N) for um campo gradiente numa vizinhança da condição inicial (t_0, y_0) . Portanto, se (M, N) for fechado (nessa vizinhança). Ou seja $M, N \in C^1$ tal que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Nestas condições dizemos que temos uma **equação diferencial exacta**.

Teorema 20.1 *Seja o PVI*

$$M + N \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0,$$

com $M, N \in C^1$ tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y),$$

para qualquer (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0) e $N(t_0, y_0) \neq 0$. Então o PVI considerado tem uma única solução $y(t)$ de classe C^1 definida numa vizinhança de $t = t_0$, dada implicitamente pela relação

$$\varphi(t, y) = c \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0,$$

onde $c = \varphi(t_0, y_0)$ e φ é definido (a menos de uma constante aditiva) por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) = N(t, y)$$

Exemplo 20.1 *Considere-se o problema de valor inicial:*

$$y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} + 4ty^3 \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}.$$

Definindo

$$M = y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} \quad \text{e} \quad N = 4ty^3,$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que a equação é exacta. Então determinemos φ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3.$$

Integrando em ordem a t a primeira equação temos

$$\varphi = ty^4 - \arctg t + f(y),$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3 + f'(y).$$

Donde $f(y)$ é constante e podemos tomar

$$\varphi = ty^4 - \operatorname{arctg} t.$$

Então a solução do problema é dada por

$$ty^4 - \operatorname{arctg} t = \varphi \left(1, \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 1 = 0.$$

Explicitando obtemos (atendendo que $y(1) > 0$)

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}},$$

definida para $t > 0$. O intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$. De facto como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$$

e

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\operatorname{arctg} t}{t} > 0,$$

a função (diferenciável em $\mathbb{R}$)

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}} & , \text{ se } t \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

é solução do problema dado.

20.2 Equações redutíveis a exactas.

20.2.1 Exemplo

Considere-se o seguinte problema:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} - \frac{y}{t} \quad \text{com} \quad y(1) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(Note-se que numa vizinhança do ponto $(t, y) = \left(1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $ty \neq 0$).

1. Temos $\frac{dy}{dt} = \frac{t - y^2}{ty}$, ou ainda

$$y^2 - t + ty \frac{dy}{dt} = 0, \tag{20.1}$$

que é da forma $M + N \frac{dy}{dt} = 0$, com $M = y^2 - t$ e $N = ty$. Temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que a equação (20.1) não é exacta.

2. Mas também podemos escrever $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - ty^2}{t^2y}$, ou seja

$$ty^2 - t^2 + t^2y \frac{dy}{dt} = 0, \quad (20.2)$$

que é da forma $M + N \frac{dy}{dt} = 0$, com $M = ty^2 - t^2$ e $N = t^2y$. Temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ty = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que a equação (20.2) é exacta.

Determinando φ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = ty^2 - t^2$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = t^2y$, obtemos por exemplo $\varphi = \frac{t^2y^2}{2} - \frac{t^3}{3}$. Atendendo à condição inicial, a solução satisfaz a $\frac{t^2y^2}{2} - \frac{t^3}{3} = 0$, donde se obtem (utilizando novamente a condição inicial) $y = \sqrt{\frac{2t}{3}}$.

Deste exemplo podemos concluir que o facto de uma equação ser exacta ou não é mais uma questão de forma do que de conteúdo.

20.2.2 Factores de integração

Do exemplo anterior concluímos que uma EDO não exacta se pode transformar numa EDO exacta multiplicando-a por uma função $\mu \neq 0$, que em geral podemos pensar que depende de t e de y ($\mu \equiv \mu(t, y)$), designada por **factor de integração**.

Consideremos então

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

e

$$\mu(t, y) M(t, y) + \mu(t, y) N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0,$$

ou simplificando a notação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dt} = 0,$$

esta equação será exacta se

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N),$$

ou seja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t},$$

ou ainda

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right). \quad (20.3)$$

Contudo, em geral, é igualmente difícil determinar uma solução não nula desta equação diferencial às derivadas como determinar uma solução da equação diferencial ordinária original. Somente em alguns casos especiais que analisaremos de seguida é possível obter facilmente uma função $\mu(t, y) \neq 0$ solução de (20.3).

20.2.3 Factores de integração Independentes de y ; $\mu \equiv \mu(t)$

Vamos ver em que condições a equação (20.3) tem uma solução independente da segunda variável y . Suponha-se então que esta equação tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(t).$$

Neste caso temos $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial \mu}{\partial t} \equiv \frac{d\mu}{dt}$ e equação (20.3) fica:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \mu, \quad (20.4)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = 0,$$

ou seja se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \text{ só depende da variável } t \text{ (ou é constante).}$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração $\mu(t)$ resolvendo a equação (20.4).

Exemplo 20.2 *Considere-se a equação*

$$y^2 e^{t^2} + 2t + 2tye^{t^2} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $M = y^2 e^{t^2} + 2t$ e $N = 2tye^{t^2}$, vem

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{2ye^{t^2} - 2ye^{t^2} - 4t^2 ye^{t^2}}{2tye^{t^2}} = -2t$$

Determinemos então uma função $\mu(t) \neq 0$ tal que $\frac{d\mu}{dt} = -2t\mu$, por exemplo $\mu = e^{-t^2}$. Multiplicando a equação original por este factor obtemos

$$y^2 + 2te^{-t^2} + 2ty \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $\check{M} = y^2 + 2te^{-t^2}$ e $\check{N} = 2ty$, e φ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \check{M}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \check{N}$. Por exemplo

$$\varphi = ty^2 - e^{-t^2}$$

Pelo que temos as seguintes soluções do problema dado:

$$ty^2 - e^{-t^2} = c$$

ou

$$y = \pm \sqrt{\frac{c + e^{-t^2}}{t}}$$

onde c é uma constante arbitrária.

20.2.4 Factores de integração Independentes de t ; $\mu \equiv \mu(y)$

Vamos ver em que condições a equação (20.3) tem uma solução independente da primeira variável t . Suponha-se então que esta equação tem uma solução da forma

$$\mu \equiv \mu(y).$$

Neste caso temos $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv \frac{d\mu}{dy}$ e a equação (20.3) fica:

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \mu, \quad (20.5)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear homogénea sse

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} = 0,$$

ou seja se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \text{ só depende da variável } y \text{ (ou é constante).}$$

Portanto se esta condição é satisfeita (e apenas quando o é) podemos calcular um factor de integração $\mu(y)$ resolvendo a equação (20.5).

Exemplo 20.3 *Considere-se a equação*

$$\operatorname{ch}(te^y) + (1 + t \operatorname{ch}(te^y)) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $M = \operatorname{ch}(te^y)$ e $N = 1 + t \operatorname{ch}(te^y)$, vem

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} = \frac{te^y \operatorname{sh}(te^y) - \operatorname{ch}(te^y) - te^y \operatorname{sh}(te^y)}{\operatorname{ch}(te^y)} = -1$$

Determinemos então uma função $\mu(y) \neq 0$ tal que $\frac{d\mu}{dy} = \mu$, por exemplo $\mu = e^y$. Multiplicando a equação original por este factor obtemos

$$e^y \operatorname{ch}(te^y) + e^y (1 + t \operatorname{ch}(te^y)) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sejam $\tilde{M} = e^y \operatorname{ch}(te^y)$ e $\tilde{N} = e^y + te^y \operatorname{ch}(te^y)$, e φ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{M}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \tilde{N}$.
Por exemplo

$$\varphi = e^y + \operatorname{sh}(te^y)$$

Pelo que temos as seguintes soluções do problema, dadas de forma implícita pela relação:

$$e^y + \operatorname{sh}(te^y) = c.$$

onde c é uma constante arbitrária.