

14.1 Cálculo de limites

Quer na classificação das singularidades isoladas quer na determinação do resíduo de pólos (como veremos mais à frente) é essencial calcular limites de funções analíticas, obtendo-se frequentemente indeterminações $\frac{0}{0}$. É pois importante saber lidar com estas situações. A próxima proposição dá-nos o resultado prático frequentemente usado na resolução de tais dificuldades. Pode ser visto como uma generalização da regra de L'Hôpital da análise real, contudo, embora agora se considerem funções de variável complexa, as condições impostas às funções são mais restrictivas: as funções têm de ser analíticas. As conclusões também são ligeiramente mais fortes: não é necessário, *a priori*, admitir a existência de um limite.

Proposição 14.1 *Sejam f e g não identicamente nulas e analíticas em $|z - z_0| < \varepsilon$ e tais que*

$$f(z_0) = g(z_0) = 0.$$

Então (onde a não existência de um dos limites implica a não existência do outro¹)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)}}{\frac{1}{f(z)}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'}$$

Demonstração. Como f e g não são identicamente nulas e são analíticas numa vizinhança de z_0 , estão bem definidas como números naturais as ordens dos zeros de f e g . Sejam então m a ordem do zero de f e n a ordem do zero de g ; por hipótese m e n são inteiros positivos. Então existem funções f_1 e g_1 analíticas em $|z - z_0| < \varepsilon$ tais

$$f(z) = (z - z_0)^m f_1(z) \quad e \quad f_1(z_0) \neq 0,$$

$$g(z) = (z - z_0)^n g_1(z) \quad e \quad g_1(z_0) \neq 0.$$

Portanto

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} f_1(z) + (z - z_0)^m f_1'(z).$$

Daqui concluímos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)(z - z_0)}{m f(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{m(z - z_0)^m f_1(z) + (z - z_0)^{m+1} f_1'(z)}{m(z - z_0)^m f_1(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(1 + \frac{(z - z_0) f_1'(z)}{m f_1(z)} \right) = 1. \end{aligned}$$

¹De facto, nestas condições, os limites em causa existem sempre em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (esfera de Riemann) verificando-se também a igualdade dos limites neste contexto generalizado, em que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ significa

por definição $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.

Então, utilizando este resultado para a função f e para a função g ,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{mf(z)}{f'(z)(z-z_0)} \frac{g'(z)(z-z_0)}{ng(z)} \frac{nf'(z)}{mg'(z)} \\ &= \frac{n}{m} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{g'(z)(z-z_0)}{ng(z)}}{\frac{f'(z)(z-z_0)}{mf(z)}} \frac{n}{m} \frac{f(z)}{g(z)} \\ &= \frac{n}{m} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \\ &= \frac{n}{m} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)}}{\frac{1}{f(z)}}.\end{aligned}$$

Basta agora verificar que no caso $m > n$, sem perda de generalidade², se tem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

De facto, para $m > n$,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)^m f_1(z)}{(z-z_0)^n g_1(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^{m-n} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \\ &= (z_0 - z_0)^{m-n} \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 14.1 Vamos calcular o seguinte limite usando duas vezes o resultado precedente:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1}{(e^z - 1)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2ze^{z^2}}{2(e^z - 1)e^z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2}}{e^z} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{(e^z - 1)} \\ &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} \\ &= 1\end{aligned}$$

²O caso $n > m$ reduz-se ao caso $m > n$ trocando os papéis de f e g . Isto é, se $n > m$, então vem $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty$, o que significa por definição $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z)}{g(z)}} = 0$.

14.2 Cálculo de resíduos em pólos de ordem m

Se f tem um pólo de ordem $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} > 0$) no ponto z_0 então (para z tal que $0 \neq |z - z_0| < R$; para certo $R > 0$)

$$f(z) = \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

com $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$. Considere-se então a função

$$g(z) = f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}.$$

Vem

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+\mathbf{m}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-\mathbf{m}} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

onde $\tilde{a}_n = a_{n-\mathbf{m}}$. A função $g(z)$ é portanto analítica em z_0 se definirmos $g(z_0) = \tilde{a}_0 = a_{-\mathbf{m}} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Temos então

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dz^n}(z_0) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} (f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}) \end{aligned}$$

Como o coeficiente $\tilde{a}_{\mathbf{m}-1} = a_{-1}$ é o resíduo da função $f(z)$ em z_0 , obtivemos assim a seguinte fórmula para o cálculo do resíduo num pólo de ordem $\mathbf{m}$ ³:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(\mathbf{m}-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{\mathbf{m}-1}}{dz^{\mathbf{m}-1}} (f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}). \quad (14.1)$$

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(\mathbf{m}-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{\mathbf{m}-1}}{dz^{\mathbf{m}-1}} (f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}).$$

³Uma vez que não se usou que $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$, a fórmula é ainda válida se tivermos um pólo de ordem inferior a $\mathbf{m}$.

Exemplo 14.2 Vamos calcular o seguinte integral sobre a circunferência de raio 3π centrada na origem percorrida no sentido positivo:

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z(e^z - 1)} dz.$$

Considere-se a função $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$. Como $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ concluímos que $e^z - 1$ tem um zero simples em $z = 0$; então $z(e^z - 1)$ tem um zero de segunda ordem em $z = 0$, pelo que $f(z)$ tem um pólo de segunda ordem no mesmo ponto e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(e^z - 1)} z^2 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2(e^z - 1)e^z} \\ &= \frac{-1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{(e^z - 1)} \\ &= \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Note-se ainda que dentro da região delimitada pela circunferência $|z| = 3\pi$ existem mais duas singularidades isoladas de $f(z)$, são elas $z = 2\pi i$ e $z = -2\pi i$. No próximo cálculo vamos verificar que estas singularidades são pólos simples (de acordo com a Proposição 13.1) e ao mesmo tempo calculamos os seus resíduos por aplicação da fórmula (14.1). Temos então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} (z \mp 2\pi i) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{z(e^z - 1)} \\ &= \frac{1}{\pm 2\pi i} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{(e^z - 1)} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{1}{e^z} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

pelo que estas singularidades são pólos simples e

$$\operatorname{Res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = \pm \frac{1}{2\pi i}.$$

Finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z(e^z - 1)} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-2\pi i} f(z) \right) \\ &= -\pi i. \end{aligned}$$

14.3 Aplicações do Teorema dos Resíduos

Integrais de funções trigonométricas

Considere-se o seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \quad (14.2)$$

onde f é uma função complexa de variável complexa analítica sobre a circunferência unitária centrada na origem. Notando que $z = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da circunferência $|z| = 1$, percorrida no sentido positivo, podemos relacionar o integral de variável real (14.2) com o um integral caminho complexo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz} dz, \end{aligned}$$

onde a curva $|z| = 1$ é considerada com o sentido positivo.

Neste contexto convem referir que, com $z = e^{i\theta}$, se tem

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Exemplo 14.3

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cos(\theta) - 5} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2(z + z^{-1}) - 5} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} dz = \frac{1}{2i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{1}{(\frac{1}{2}-2)} = \frac{-2\pi}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 14.4

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 \sin(\theta) - 5} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{4 \frac{z-z^{-1}}{2i} - 5} \frac{1}{iz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - i5z - 2} dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-i2)(z-\frac{i}{2})} dz = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{(\frac{i}{2}-2i)} \\ &= \frac{-2\pi}{3} \end{aligned}$$

O resultado acima exposto pode ser aplicado a uma miríade de outras situações semelhantes. É o que se pretende ilustrar nos seguintes exemplos.

Exemplo 14.5

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(3\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos(3\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2} (e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z^{-3}}{iz} dz = \frac{1}{4i} \left(\oint_{|z|=1} z^2 dz + \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^4} dz \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por aplicação trivial do Teorema dos Resíduos.

Exemplo 14.6 Fazendo a substituição $t = \pi\theta$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(e^{i\pi\theta}) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(e^{it}) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz} dz.
\end{aligned}$$

Exemplo 14.7 Vamos calcular o integral

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{\pi x}{2}$,

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2 + \cos(t)} dt.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{2}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{4z + z^2 + 1} dz \\
&= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z + 2)^2 - 3} dz \\
&= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} dz.
\end{aligned}$$

Atendendo que $|-2 - \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3} > 1$ e $|-2 + \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} < 1$, vem pelo Teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{4}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} \\
&= 8 \lim_{z \rightarrow -2+\sqrt{3}} \frac{1}{(z + 2 + \sqrt{3})} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$