

13.1 Singularidades isoladas

Para na prática podermos aplicar o teorema dos resíduos com eficiência, precisamos de conhecer técnicas de cálculo de resíduos. Com esse objectivo vamos enunciar algumas definições e proposições elementares que nos permitirão posteriormente introduzir as referidas técnicas de cálculo de resíduos.

Definição 13.1 *Seja f uma função complexa de variável complexa e $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que f tem uma **singularidade isolada** em z_0 se não é analítica (ou não está definida) em z_0 , mas existe $\varepsilon > 0$ tal que f é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.*

Definição 13.2 *Seja f uma função complexa de variável complexa e $z_0 \in \mathbb{C}$. Se existe $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{Z}$ tal que para qualquer z satisfazendo $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, se tem*

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

com $a_m \neq 0$. Ou dito de outra forma, f admite um desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto z_0 e a sua parte singular é finita, sendo m a ordem da primeira potência do desenvolvimento. Então:

1. se $m > 0$ então z_0 é um **zero de ordem m** da função f .
2. se $m \geq 0$ e z_0 é uma singularidade isolada, então z_0 é uma **singularidade removível** da função f .
3. se $m < 0$ então z_0 é um **pólo de ordem $-m$** da função f .

Definição 13.3 *Se f tem uma singularidade isolada em z_0 que não é nem uma singularidade removível, nem um pólo de certa ordem, então z_0 é uma **singularidade essencial** de f . Ou dito de outra forma f tem uma **singularidade essencial** em z_0 sse o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto z_0 tem uma parte singular infinita¹.*

Portanto as singularidades isoladas classificam-se (exclusivamente) em **singularidades removíveis**, **pólos** ou **singularidades essenciais**.

¹Dizemos que uma série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ tem uma parte singular infinita se o conjunto de inteiros $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$ é infinito.

Exemplo 13.1

$$1. \quad a) \quad \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$z = 0$ é um zero de primeira ordem (ou um zero simples) de $\operatorname{sen} z$.

$$b) \quad z^3 \operatorname{sen} z = z^4 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots$$

$z = 0$ é um zero de 4^a ordem de $z^3 \operatorname{sen} z$.

$$2. \quad a) \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$z = 0$ é uma singularidade removível de $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

$$b) \quad \frac{\operatorname{sen} z^3}{z} = z^2 - \frac{z^8}{3!} + \frac{z^{14}}{5!} - \dots$$

$z = 0$ é uma singularidade removível e um zero de 2^a ordem de $\frac{\operatorname{sen} z^3}{z}$.

$$3. \quad a) \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$z = 0$ é um pólo de 1^a ordem (ou um pólo simples) de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$,
o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ em $z = 0$ é 1. ($\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = 1$)

$$b) \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z} - \frac{1}{7!} z + \frac{1}{9!} z^3 \dots$$

$z = 0$ é um pólo de 5^a ordem de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^6}$,
o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^6}$ em $z = 0$ é $\frac{1}{5!}$. ($\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^6} = \frac{1}{5!}$)

$$c) \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z^7} = \frac{1}{z^6} - \frac{1}{3! z^4} + \frac{1}{5! z^2} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} z^2 \dots$$

$z = 0$ é um pólo de 6^a ordem de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^7}$,
o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^7}$ em $z = 0$ é 0. ($\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^7} = 0$)

$$4. \quad a) \quad z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5! z^2} - \frac{1}{7! z^4} \dots$$

$z = 0$ é uma singularidade essencial de $z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$,
o resíduo de $z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ em $z = 0$ é 0. ($\operatorname{Res}_{z=0} (z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}) = 0$)

$$b) \quad z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2} = z^3 - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^5} - \frac{1}{7! z^9} - \dots$$

$z = 0$ é uma singularidade essencial de $z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}$,
o resíduo de $z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}$ em $z = 0$ é $\frac{1}{3!}$. ($\operatorname{Res}_{z=0} (z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}) = \frac{1}{3!}$)

Quando não é fácil (ou possível) determinar o desenvolvimento de Laurent em torno de um ponto, a seguinte proposição é de grande utilidade na classificação de singularidades isoladas.

Proposição 13.1 *Se f é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ para certo $\varepsilon > 0$, então*

1. *f tem um **zero de ordem m** em z_0 sse $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*
2. *f tem uma **singularidade removível** em z_0 sse $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*
3. *f tem um **pólo de ordem m** em z_0 sse $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Demonstração. 1. *Se f tem um **zero de ordem m** em z_0 , então*

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n,$$

pelo que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} = a_m \neq 0$. Reciprocamente se $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então por hipótese a função definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{se } 0 < |z - z_0| < \varepsilon \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{se } z = z_0 \end{cases},$$

é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ e contínua em z_0 . Pelo Corolário 12.2 concluímos que $g(z)$ é analítica em todo o círculo $|z - z_0| < \varepsilon$. Então pelo Teorema de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z_0) = \tilde{a}_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0.$$

Portanto, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^{n+m}$ tem um zero de ordem m em z_0 .

2. *Se f tem uma **singularidade removível** em z_0 , então $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, pelo que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$. Reciprocamente se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, então por hipótese a função definida por*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } 0 < |z - z_0| < \varepsilon \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & \text{se } z = z_0 \end{cases},$$

é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ e contínua em z_0 . Pelo Corolário 12.2 concluímos que $g(z)$ é analítica em todo o círculo $|z - z_0| < \varepsilon$. Então pelo Teorema de Taylor $f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

3. *Se f tem um **pólo de ordem m** em z_0 , então*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

pelo que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) = a_{-\mathbf{m}} \neq 0$. Reciprocamente se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então por hipótese a função definida por

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) & \text{se } 0 < |z - z_0| < \varepsilon \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) & \text{se } z = z_0 \end{cases},$$

é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ e contínua em z_0 . Pelo Corolário 12.2 concluímos que $g(z)$ é analítica em todo o círculo $|z - z_0| < \varepsilon$. Então pelo Teorema de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z_0) = \tilde{a}_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) \neq 0.$$

Portanto, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^{n-\mathbf{m}}$ tem um pólo de ordem $\mathbf{m}$ em z_0 . ■

13.2 Classificação de singularidades isoladas

Por vezes, para obter enunciados mais sucintos para as propriedades de pólos e zeros de funções, são convenientes, de acordo com a proposição anterior, as seguintes convenções:

Definição 13.4 Dado $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}$, positivo, negativo ou nulo e uma função analítica na região definida por $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ (i. e. numa vizinhança perfurada de z_0),

1. f tem um **zero de ordem $\mathbf{m}$** sse $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. f tem um **pólo de ordem $\mathbf{m}$** em z_0 sse $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Portanto, de acordo com esta definição, $f(z)$ tem um zero de ordem $\mathbf{m}$ sse tem um pólo de ordem $-\mathbf{m}$. Em particular uma função tem um zero de **ordem zero** em z_0 (ou o que é o mesmo, um pólo de **ordem zero** em z_0) sse $f(z)$ é analítica numa vizinhança de z_0 e não se anula neste ponto (e portanto também não se anula numa vizinhança do ponto).

Como resultado imediato, mas importante do ponto de vista prático, temos a seguinte:

Proposição 13.2 Se $f(z)$ tem um zero de ordem $\mathbf{m}$ em z_0 e $g(z)$ um zero de ordem $\mathbf{n}$ no mesmo ponto, então

1. A função $f(z)g(z)$ tem um zero de ordem $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ em $z = z_0$.
2. A função $\frac{f(z)}{g(z)}$ tem²:

²Se $g(z)$ (é analítica e) tem um zero de ordem finita $\mathbf{n}$ (i. e. não é identicamente nula) em z_0 então existe uma vizinhança de z_0 onde z_0 é o único zero de g . Pois neste caso $g_1(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{n}}}$ é uma função analítica que não se anula em z_0 ; por continuidade o mesmo acontece numa vizinhança deste ponto; então $g(z) = (z - z_0)^{\mathbf{n}} g_1(z)$ também não se anula numa vizinhança de z_0 (excluindo o ponto z_0).

- (a) um zero de ordem $\mathbf{m} - \mathbf{n}$, se $\mathbf{m} > \mathbf{n}$.
- (b) uma singularidade removível, se $\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$.
- (c) um pólo de ordem $\mathbf{n} - \mathbf{m}$, se $\mathbf{m} < \mathbf{n}$.

Exemplo 13.2 Considere-se a função $\frac{\sin^2 z}{(z - \pi)^9}$. Como $z = \pi$ é um zero simples de $\sin z$ (porque $\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin z}{z - \pi} = -1$), concluímos, de acordo com a proposição anterior, que $\sin^2 z$ tem um zero de segunda ordem e $\frac{\sin^2 z}{(z - \pi)^9}$ um pólo de ordem 7 no mesmo ponto.

Proposição 13.3 Se $f(z)$ tem um zero de ordem $\mathbf{m}$ em z_1 e $g(z)$ um zero de ordem $\mathbf{n} > 0$ no ponto z_0 , então $f(z_1 + g(z))$ tem um zero de ordem $\mathbf{mn}$ em $z = z_0$.

Demonstração. Uma vez que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z_1 + g(z)) = z_1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_1 + g(z))}{(z - z_0)^{\mathbf{mn}}} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{g(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{n}}} \right)^{\mathbf{m}} \frac{f(z_1 + g(z))}{(z_1 + g(z) - z_1)^{\mathbf{m}}} \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{n}}} \right)^{\mathbf{m}} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{\mathbf{m}}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

■

Exemplo 13.3 Considere-se a função $\frac{\sin z^3}{\sin((\sin z^2)^3)}$. Como $z = 0$ é um zero simples de $\sin z$, concluímos, de acordo com a proposição anterior, que $\sin z^3$ tem um zero de terceira ordem e $\sin((\sin z^2)^3)$ tem um zero de sexta ordem no mesmo ponto. Portanto $\frac{\sin z^3}{\sin((\sin z^2)^3)}$ tem um pólo de terceira ordem em $z = 0$.