

12.1 Série de Laurent

Vamos agora generalizar o Teorema 11.1 considerando funções analíticas apenas em coroas circulares.

Teorema 12.1 (Série de Laurent) *Seja f uma função complexa de variável complexa, z_0 um número complexo e r um real não negativo e R um real ou $+\infty$ (tal que $r < R$). Se a função f é analítica no anulo $\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, então para qualquer z neste anulo temos ¹*

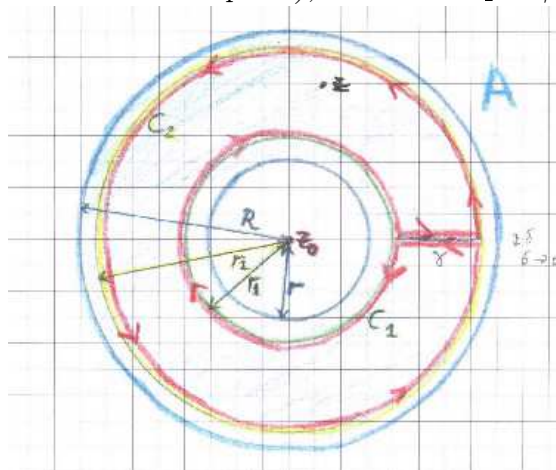
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e C é uma (qualquer) curva simples, fechada e seccionalmente regular que envolve o ponto z_0 e está contida no anulo $\mathbf{A}$.

Demonstração. (Esta demonstração é semelhante à demonstração do Teorema 11.1) *Seja $z \in \mathbf{A}$, e r_1, r_2 dois reais positivos tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Considere-se as circunferências C_1 , de centro em z_0 e raio r_1 , e C_2 , de centro em z_0 e raio r_2 . Seja γ um segmento de recta que liga C_2 a C_1 nesta ordem. Finalmente considere-se a curva fechada Γ que é a concatenação de C_2 com γ , com $-C_1$ (curva C_1 percorrida no sentido negativo), com $-\gamma$ (curva γ percorrida no sentido oposto); i. e. $\Gamma = C_2 + \gamma - C_1 - \gamma$.*



$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + a_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + a_{-1} \frac{1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Pela fórmula integral de Cauchy obtemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{i2\pi} \left(\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Para $\xi \in C_2$, temos $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ e de acordo com os cálculos efectuados na demonstração do Teorema 11.4, temos

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

sendo a convergência uniforme em C_2 . De modo semelhante, trocando os papéis de ξ e z temos: para $\xi \in C_1$, $|\xi - z_0| < |z - z_0|$ e de acordo com os cálculos efectuados anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{z - \xi} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}}. \end{aligned}$$

sendo a convergência uniforme em C_1 . Então de 12.1, e de acordo com o Teorema 11.1, vem

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \left(\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} f(\xi) \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi (z - z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

onde, para $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

e

$$a_{-n} = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi.$$

Mas então, de acordo com o Corolário 8.4, podemos escrever, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

onde C é qualquer curva simples, fechada e seccionalmente contínua que envolve o ponto z_0 e está contida no anulo **A**. ■

Corolário 12.2 Se f é contínua em z_0 e é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, para certo $\varepsilon > 0$, então é analítica em z_0 .

Demonstração. Considere-se a demonstração anterior. Na presente situação temos $r = 0$ pelo que podemos tomar valores de r_1 (raio da circunferência C_1) tão próximos de 0 quanto desejarmos. Como f é contínua em z_0 , existe r_1 tal que

$$|\xi - z_0| < r_1 \Rightarrow |f(\xi) - f(z_0)| \leq 1.$$

Então, para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} (\xi - z_0)^{n-1} f(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} |\xi - z_0|^{n-1} |f(\xi)| |d\xi| = \frac{r_1^{n-1}}{2\pi} \oint_{C_1} |f(\xi)| |d\xi| \\ &\leq \frac{(|f(z_0)| + 1) r_1^{n-1}}{2\pi} \oint_{C_1} |d\xi| = (|f(z_0)| + 1) r_1^n. \end{aligned}$$

Fazendo r_1 tender para zero obtemos $a_{-n} = 0$. Onde pelo teorema anterior

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Mas como ambos os termos desta igualdade são funções contínuas em z_0 , concluímos que a igualdade é verdadeira para todo z tal que $|z - z_0| < \varepsilon$. Pelo que a conclusão deste corolário sai do Teorema 11.1 que garante que qualquer série de potências (não negativas) é analítica no interior do seu círculo de convergência. ■

Notação 12.1 Nas condições do Teorema 12.1

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

o lado direito da igualdade designa-se por série de Laurent de $f(z)$ convergente no anulo $r < |z - z_0| < R$. Esta é a soma de duas séries:

$$f(z) = g_s(z) + g_r(z)$$

onde

$$g_s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n$$

é a **parte singular** da série (função analítica em $r < |z - z_0|$) e

$$g_r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é a **parte regular** da série e representa uma função analítica no círculo $|z - z_0| < R$.

Quando $r = 0$, dizemos que a série de Laurent correspondente é o desenvolvimento de f em torno de z_0 .

12.2 Teorema dos resíduos

Note-se que nas condições do Teorema **12.1**

$$\oint_C f(z) dz = i2\pi a_{-1}.$$

Definição 12.2 Se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ para z tal que $0 < |z - z_0| < r$ (i. e. se f é analítica em $0 < |z - z_0| < r$) então a_{-1} é o **resíduo de f em z_0** :

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$$

Em particular, se $f(z)$ é analítica em z_0 , então $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Exemplo 12.1 Cálculo do resíduo de $\frac{e^{z^4}}{z^9}$ em $z = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{z^4}}{z^9} &= \frac{1}{z^9} \left(1 + z^4 + \frac{1}{2!} z^8 + \frac{1}{3!} z^{12} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

portanto

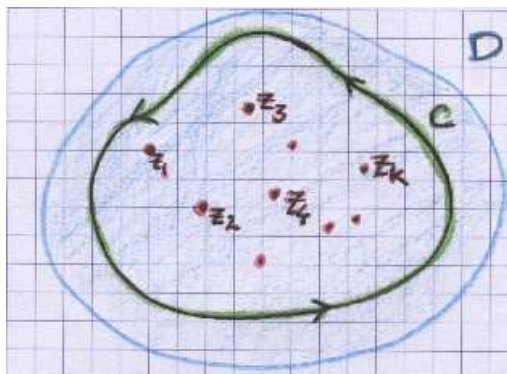
$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{z^4}}{z^9} = \frac{1}{2!}$$

Teorema 12.3 (dos Resíduos) Seja:

D um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$,

f analítica em $D \setminus \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_k\}$ (analítica em D excepto possivelmente num conjunto finito de pontos - com k elementos),

C uma curva fechada e simples (e seccionalmente regular) que envolve os pontos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$ no sentido positivo.

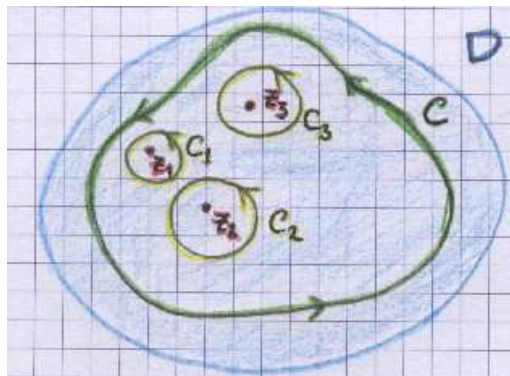


Então

$$\oint_C f(z) dz = i2\pi \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Demonstração. Consequência imediata do Corolário 8.5 e do Teorema 12.1 Por exemplo para $k = 3$

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz \\ &= i2\pi \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + i2\pi \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) + i2\pi \operatorname{Res}_{z=z_3} f(z)\end{aligned}$$



■

Exemplo 12.2 Este exemplo mostra bem a potência do Teorema dos Resíduos no cálculo de integrais.

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^4}}{z^9} dz &= i2\pi \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{z^4}}{z^9} \\ &= i\pi,\end{aligned}$$

de acordo com o Exemplo 12.1.

Exemplo 12.3 O Teorema dos Resíduos vem também sistematizar os resultados anteriores.

Pelo Teorema dos Resíduos temos

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-z^2} dz &= i2\pi \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z-z^2} + \operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{z-z^2} \right) = i2\pi (1-1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z-z^2}$ e $\operatorname{Res}_{z=1} \frac{1}{z-z^2}$ podem ser calculados pela definição (são possíveis cálculos mais expeditos como poderemos ver mais à frente):

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z^2} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} (1+z+z^2+\dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \\ \frac{1}{z-z^2} &= \frac{-1}{z-1} \frac{1}{z} = \frac{-1}{z-1} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{-1}{z-1} (1-(z-1)+(z-1)^2-\dots) \\ &= \frac{-1}{z-1} + 1 - (z-1) + \dots\end{aligned}$$

Mas outro cálculo seria possível sem aplicar o referido teorema, mas aplicando os resultados que lhe servem de base (Corolário 8.5 e fórmula integral de Cauchy):

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-z^2} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{1-z}}{z} dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z}}{1-z} dz = i2\pi - i2\pi = 0.$$

Ou, neste caso muito particular, poderemos apenas usar o cálculo do Exemplo 8.6:

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-z^2} dz = \oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) dz = i2\pi - i2\pi = 0.$$

Exemplo 12.4 Vamos calcular o integral

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz,$$

onde a curva C é a elipse $|z+2\pi i| + |z| = 8$ percorrida no sentido positivo.

Começemos por verificar que a função $\frac{1}{1-e^z}$ é analítica em todos os pontos excepto os pontos z tais que $e^z = 1$, portanto é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2\pi ki : k \in \mathbb{Z}\}$. Como

$$|2\pi ki + 2\pi i| + |2\pi ki| < 8 \Leftrightarrow 2\pi (|k+1| + |k|) < 8$$

$$\Leftrightarrow |k+1| + |k| < \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} k = -1 \text{ ou } k = 0,$$

temos pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} \right).$$

Falta agora calcular estes valores, $\operatorname{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z}$ e $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z}$. Contudo, o desenvolvimento de Laurent da função $\frac{1}{1-e^z}$ em torno dos pontos $z = -2\pi i$ e $z = 0$, não é fácil de obter. Seria portanto vantajoso desenvolver um processo de cálculo destes resíduos sem passar pelo cálculo explícito da série de Laurent. Este será o assunto que trataremos a seguir. De facto, na próxima aula veremos que

$$\operatorname{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow -2\pi i} \frac{z+2\pi i}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow -2\pi i} \frac{1}{-e^z} = -1$$

e

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1-e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{-e^z} = -1.$$

Donde

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz = -4\pi i.$$