

10.1 Convergência uniforme de séries

Exemplo 10.1 (Série geométrica) *Considere-se a série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

com $z \in \mathbb{C}$. Vamos analisar a sua região de convergência: i. e. para que valores de $z \in \mathbb{C}$ a série converge.

Se $|z| \geq 1$, então $|z^n| = |z|^n \geq 1$, portanto z^n não tende para zero, concluindo-se que a série é divergente¹.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} z^n &= 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1} \\ &= \frac{1-z}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} z^n, \text{ excluindo o caso trivial } z = 1 \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} (1-z) z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{N-1} (z^n - z^{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-z} ((1-z) + (z-z^2) + (z^2-z^3) + \dots + (z^{N-1}-z^N)) \\ &= \frac{1-z^N}{1-z}. \end{aligned}$$

Se $|z| < 1$, então $\lim_{N \rightarrow +\infty} |z^N| = \lim_{N \rightarrow +\infty} |z|^N = 0$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1-z^N}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

¹De facto, se $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ é uma série convergente de números complexos e a_n e b_n são a parte real e a parte imaginária de w_n respectivamente (i. e. $w_n = a_n + ib_n$), temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge e } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge} \\ &\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \text{ e } b_n \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow w_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ou seja o termo geral de uma série convergente é um infinitésimo.

Dado um ponto z tal que $|z| < 1$ e um erro $\varepsilon > 0$, vamos determinar o número de termos N , da soma finita, que precisamos calcular para obtermos uma aproximação a menos de um erro ε no valor da série:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right| = \left| \frac{1-z^N}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^N}{|1-z|} < \varepsilon$$

aplicando logaritmos

$$N \log |z| - \log |1-z| < \log \varepsilon$$

donde²

$$N > \frac{\log \varepsilon + \log |1-z|}{\log |z|}.$$

Se z estiver cada vez mais próximo da circunferência $|z| = 1$, então o número N terá que ser cada vez maior. Portanto o número de parcelas que são necessárias calcular para obter um resultado com uma certa aproximação dada depende do ponto z que consideramos no círculo $|z| < 1$. Nesta situação dizemos que **a convergência da série não é uniforme no círculo** $|z| < 1$.

Contudo se em vez do círculo unitário, considerarmos o círculo $|z| \leq \frac{1}{2}$, então

$$\frac{|z|^N}{|1-z|} \leq \frac{|z|^N}{1-|z|} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

se

$$N > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 1.$$

Pelo que, o número de parcelas necessárias para obter uma aproximação a menos de ε do valor da série, pode ser escolhido de forma independente da escolha do ponto z no domínio considerado. Dizemos neste caso que **a série converge uniformemente no círculo** $|z| \leq \frac{1}{2}$.

De forma rigorosa podemos definir convergência uniforme do seguinte modo:

Definição 10.1 Dadas as funções $f_n(z)$ definidas num conjunto D , a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em D para a função $f(z)$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : N \geq N_0 \Rightarrow \left(\forall z \in D : \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n(z) \right| < \varepsilon \right)$$

Portanto, existe convergência uniforme de uma série de funções num certo conjunto D (não necessariamente o domínio da função) se a série pode ser bem aproximada por uma soma finita em todo o conjunto D ; o número de parcelas a considerar nessa aproximação não depende do ponto em D aonde se calcula a série.

Para verificar se uma série de funções é uniformemente convergente é-nos útil o seguinte critério.

²Note-se $\log |z| < 0$.

Teorema 10.1 (Critério de Weierstrass) Dadas as funções $f_n(z)$ definidas num conjunto D , seja M_n uma sucessão de reais positivos tais que

$$1. \forall z \in D : |f_n(z)| \leq M_n.$$

$$2. \text{ A série } \sum_{n=0}^{+\infty} M_n \text{ é convergente}$$

Então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente em D .

Demonstração. Pelo critério da comparação, temos que para cada $z \in D$ a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \equiv f(z)$ é convergente. Então dado $\varepsilon > 0$, seja N_0 tal que $\sum_{n=N_0}^{+\infty} M_n < \varepsilon$; obtemos para $N > N_0$

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n(z) \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} M_n \leq \sum_{n=N_0}^{+\infty} M_n < \varepsilon.$$

■

Exemplo 10.2 A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nz)}{n^n}$ é uniformemente convergente no círculo $|z| \leq 1$

1. De facto (para $|z| \leq 1$)

$$\left| \frac{\cos(nz)}{n^n} \right| = \frac{|e^{inz} + e^{-inz}|}{2n^n} \leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2n^n} \leq \frac{e^{n|z|} + e^{n|z|}}{2n^n} \leq \frac{e^n}{n^n}$$

e pelo critério da raiz a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n^n}$, é convergente. Estamos portanto nas condições do critério do critério de Weierstrass.

10.2 Séries de potências

Definição 10.2 Dado uma sucessão de números complexos a_n e um número complexo z_0 define-se a **série de potências** de coeficientes a_n e centro z_0 por:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (10.1)$$

sendo, portanto, uma função da variável complexa z definida nos pontos onde for convergente. Note-se que o coeficiente a_n multiplica a potência n de $z - z_0$, pelo que o índice n no coeficiente a_n não é arbitrário.

Exemplo 10.3 A série $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n^2+n} (z + \pi - i)^{n^2}$ é uma série de potências. De facto esta série pode-se escrever na forma: $(n \text{ é um quadrado perfeito se existe um inteiro } k \text{ tal que } n = k^2)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{com } a_n = \begin{cases} 3^{n+\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é um quadrado perfeito} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } z_0 = -\pi + i.$$

Definição 10.3 Dada uma série de potências (10.1) de coeficientes a_n o seu **raio de convergência** é

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (10.2)$$

onde $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ designa o limite superior (o maior dos sublimites em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) da sucessão $\sqrt[n]{|a_n|}$, com as convenções $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$. Portanto, $R \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Exemplo 10.4 O raio de convergência da série dada no Exemplo 10.3 é $\frac{1}{3}$, porque para esta série $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{3^{n+\sqrt{n}}} = \lim 3^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 3$.

Teorema 10.2 Considere-se a série de potências (10.1) de coeficientes a_n e centro z_0 , e seja R o seu raio de convergência definido por (10.2).

1. A série é uniformemente convergente no círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, onde r é qualquer real positivo tal que $r < R$.
2. A série é divergente se $|z - z_0| > R$.

Demonstração.

1. Se $|z - z_0| \leq r < R$, então $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} r^n = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} r = \frac{1}{R} r < 1$, concluindo-se pelo critério de Cauchy (sobre séries de termos positivos) que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ é convergente. Então como $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$, obtemos pelo critério de Weierstrass (Teor. 10.1) a convergência uniforme da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ na região $|z - z_0| \leq r$.
2. Vamos mostrar o contra-recíproco: se a série de potências é convergente então $|z - z_0| \leq R$. De facto neste caso (convergência) temos $\lim a_n (z - z_0)^n = 0$ (o termo geral da série é um infinitésimo) pelo que para n suficientemente grande $|a_n (z - z_0)^n| < 1$ e portanto, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} \leq 1$.

Como $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = \frac{1}{R} |z - z_0|$, vem $\frac{|z - z_0|}{R} \leq 1$.

■

Recorde-se do curso de análise real o seguinte resultado:

Teorema 10.3 (Sobre sucessões reais positivas) Seja u_n uma sucessão de reais positivos para a qual exista em $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Este resultado dá-nos um método útil para calcular o raio de convergência para certas séries de potências, através da fórmula $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ no caso deste limite existir. No entanto, por vezes é bem mais simples usar directamente a definição $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ e, por outro lado, facilmente se encontram exemplos (e. g. Exemplo 10.3) para os quais não existe o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (existindo contudo, o raio de convergência dado por $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$).

10.3 Analiticidade das séries de potências

Vamos agora estudar alguns resultados gerais sobre séries de funções uniformemente convergentes que utilizaremos para mostrar que qualquer série de potências é uma função holomorfa (analítica). De facto, uma série de potências é uma série de funções da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$, com $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ pelo que poderemos aplicar os seguintes teoremas a estas séries.

Teorema 10.4 *Se C é uma curva seccionalmente regular, se $\int_C f_n(z) dz$ existe para todo n , se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em C e se $\int_C f(z) dz$ existe, então*

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z) dz$$

Demonstração. *Como a convergência é uniforme, dado uma aproximação $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que, para $N > N_0$,*

$$\forall z \in C \quad f(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z) + r_N(z), \quad \text{com } |r_N(z)| < \varepsilon.$$

Usando a linearidade do integral, vem

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \sum_{n=0}^N f_n(z) dz + \int_C r_N(z) dz \\ &= \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz + \int_C r_N(z) dz, \end{aligned}$$

donde

$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz \right| = \left| \int_C r_N(z) dz \right| < \int_C |r_N(z)| |dz| < \varepsilon \int_C |dz|.$$

Como $\int_C |dz|$ é o comprimento da curva C (que não depende de N nem de ε) e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos

$$\int_C f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz$$

■

Teorema 10.5 Se D é um conjunto aberto do plano complexo, se as funções $f_n(z)$ são analíticas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D , então

$$f(z) \text{ é analítica em } D \quad e \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$$

($k \in \mathbb{N}$)

Demonstração. Primeiro mostra-se que $f(z)$ é contínua pelo argumento clássico $\delta/3$. (É a mesma demonstração da para o caso de funções reais de variável real. Se as funções $f_n(z)$ são contínuas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D , então $f(z)$ é contínua em D)

Considere-se um círculo $V \subset D$. Pelo Teorema 10.4³ e pelo Teorema de Cauchy (Teor. 8.2) temos, para qualquer curva fechada em V ,

$$\oint f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \oint f_n(z) dz = 0.$$

Então pelo Teorema de Morera (Teor. 9.4) concluímos que f é analítica em V . Posto isto, dado $z \in D$, V um disco aberto que contém z e está contido em D , e C uma curva fechada que envolve z no sentido positivo e está contida em V ,



vem pelas fórmulas integrais de Cauchy e pelo Teorema 10.4 que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

■

Teorema 10.6 Uma função definida por uma série de potências é analítica no interior da seu círculo de convergência. Nessa região a série pode ser derivada termo a termo.

Demonstração. Seja R o raio de convergência e z_0 o seu centro. Dado z tal que $|z - z_0| < R$, seja r tal que $|z - z_0| < r < R$. Pelo Teorema 10.2 a série é uniformemente convergente no círculo de raio r e centro em z_0 , então pelo teorema anterior (Teor. 10.5) temos que a função é analítica nesse círculo, e portanto em z , e que podemos derivar a série termo a termo nesse ponto. ■

³Os integrais existem porque tanto $f_n(z)$ como $f(z)$ são funções contínuas.