

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

Para tornar rigorosa a demonstração da fórmula integral de Cauchy devemos considerar a próxima proposição que envolve a seguinte definição:

Definição 9.1 *Seja $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (com $a < b$) um caminho seccionalmente regular, $C = z([a, b])$ e φ uma função **real** de variável complexa definida e em C . Então sempre que o lado direito da seguinte expressão existir como um número real dizemos que φ é integrável sobre C e escrevemos*

$$\int_C \varphi(z) |dz| = \int_a^b \varphi(z(t)) |z'(t)| dt$$

Observação 9.1 *Esta definição coincide com a definição de integral de linha de um campo escalar definido em $\mathbb{R}^2$, identificando naturalmente φ com um tal campo: $z = x + iy$, $\varphi(z) = \varphi(x, y)$,*

$$\int_a^b \varphi(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b \varphi(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Portanto $\int_C 1 |dz| =$ comprimento do arco C .

Proposição 9.1 *Seja $C \subset \mathbb{C}$, uma curva seccionalmente regular e f uma função complexa de variável complexa definida e integrável em C . Então*

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

Demonstração. Usando uma parametrização (seccionalmente regular) $z(t)$ de C temos

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz| \end{aligned}$$

■

Teorema 9.2 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja C uma curva seccionalmente regular, simples e fechada, percorrida no sentido positivo. Considere-se f uma função analítica na região delimitada pela curva C e $z \in \mathbb{C}$ um ponto interior a esta região. Então*

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i2\pi f(z).$$

Demonstração. *Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno tal que a circunferência $|\xi - z| = \delta$ esteja contida na região delimitada pela curva C .*

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - i2\pi f(z) &= \oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \oint_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi, \end{aligned}$$

onde se usou o Corolário 8.4 e portanto a hipótese de f ser analítica. Estimando o lado direito da igualdade acima temos:

Seja $\varepsilon > 0$ e tome-se $\delta > 0$ tal que (este δ existe porque f é contínua)

$$|\xi - z| \leq \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| \leq \varepsilon$$

então

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - i2\pi f(z) \right| &\leq \oint_{|\xi - z| = \delta} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \oint_{|\xi - z| = \delta} |d\xi| = \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} 2\pi\delta = \varepsilon 2\pi \end{aligned}$$

Fazendo ε tender para zero concluímos resultado pretendido. ■

Exemplo 9.1 Sendo C a circunferência de raio unitário centrada na origem, temos pela fórmula integral de Cauchy¹

$$\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} dz = i2\pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{i\pi}{2},$$

uma vez que a função $f(z) = z^2$ é analítica e o ponto $z = \frac{1}{2}$ é interior ao círculo $|z| \leq 1$.

9.1 Fórmulas integrais de Cauchy

Provamos o seguinte resultado:

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i2\pi f(z)$$

se C é uma curva fechada simples, percorrida no sentido positivo, que envolve o ponto z e se f é uma função analítica na região delimitada por C .

Esta fórmula mostra que para conhecer uma função analítica em toda a região delimitada por uma curva fechada basta conhecer como ela é sobre a curva. Então, se z e $z + h$ estão no interior da região delimitada por C , obtemos

$$\begin{aligned} f(z + h) - f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_C f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi \\ &= \frac{h}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi, \end{aligned}$$

como

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} - \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{h}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} d\xi$$

¹Note-se que $\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} dz = \oint_C \frac{\xi^2}{\xi - \frac{1}{2}} d\xi$.

obtemos ²

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

De forma análoga mostra-se que

$$f''(z) = \frac{2}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

e (por indução) o seguinte teorema³.

Teorema 9.3 (Fórmulas integrais de Cauchy) *Seja C uma curva seccionalmente regular, simples e fechada, percorrida no sentido positivo. Considere-se f uma função analítica na região delimitada pela curva C e $z \in \mathbb{C}$ um ponto interior a esta região. Então (para $n \in \mathbb{N}$)*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Note-se que se f é analítica em z então existe uma vizinhança V aonde f é analítica e podemos considerar uma curva C em V que envolve z . Então o teorema acima garante que se f é analítica então tem derivadas de todas as ordens; ou seja uma função analítica é indefinidamente diferenciável.

Corolário 9.4 *Se f é analítica então f' também é analítica; uma função analítica é indefinidamente diferenciável; dada uma função analítica $f(z)$, a sua derivada ordem n , $f^{(n)}(z)$, existe e é uma função analítica.*

Corolário 9.5 *Se u e v são respectivamente as partes real e imaginária de uma função analítica $f = u + iv$, então u e v têm derivadas parciais de todas as ordens (sendo, portanto, contínuas).*

Demonstração. *Para uma função analítica*

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)$$

²Note-se (para h perto de 0)

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} d\xi \right| &\leq \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z - h||\xi - z|^2} |d\xi| \\ &\leq \oint_C \frac{|f(\xi)|}{(|\xi - z| - |h|)|\xi - z|^2} |d\xi| \\ &\leq \frac{M}{(d - |h|)d^2} \oint_C |d\xi| \end{aligned}$$

onde d é a distância de z a C ($d = \min_{\xi \in C} |\xi - z|$) e M é o valor máximo de $|f|$ sobre C ($M = \max_{\xi \in C} |f(\xi)|$).

³Definindo $g(z) = \frac{1}{\xi - z}$, então $g^{(n)}(z) = \frac{n!}{(\xi - z)^{n+1}}$. Pelo que formalmente as fórmulas obtêm-se umas das outras comutando a integração com a derivação.

e pelas equações de Cauchy-Riemann.

$$f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (u + iv).$$

Pelo Corolário 9.4 e aplicando n vezes o operador $\frac{\partial}{\partial x}$ vem

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^n},$$

pelo que as derivadas parciais $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ existem são contínuas. Mas podemos também aplicar $n - k$ vezes o operador $\frac{\partial}{\partial x}$ e k vezes o operador $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}$ obtendo-se

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + \frac{1}{i^{k-1}} \frac{\partial^{n-k} v}{\partial x^{n-k} \partial y^k},$$

para qualquer natural n e k tais que $0 \leq k \leq n$. Conclui-se então que todas as derivadas parciais de u e v existem e são contínuas. ■

Exemplo 9.2 (de aplicação das fórmulas integrais de Cauchy) Considere-se $f(\xi) = e^{2\xi}$, $n = 4$, $f^{(4)}(\xi) = 2^4 e^{2\xi}$

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^5} dz &= \oint_{|\xi|=1} \frac{e^{2\xi}}{(\xi - 0)^5} d\xi \\ &= \frac{i2\pi}{4!} [2^4 e^{2\xi}]_{\xi=0} \\ &= \frac{i2\pi}{2 \cdot 3 \cdot 4} 4^2 \\ &= \frac{i4\pi}{3} \end{aligned}$$

Teorema 9.6 (Teorema de Morera) Seja f uma função complexa de variável complexa contínua num aberto D , tal que para qualquer curva fechada C contida em D se tenha

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Então f é analítica em D .

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer em D e z um ponto numa vizinhança convexa V de z_0 contida em D . Considere-se $F(z)$ o integral de $f(z)$ ao longo do segmento de recta que une z_0 a z (neste sentido), i. e.

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi.$$

Dado $h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h$ ainda pertença à vizinhança (convexa) V , temos de, acordo com a hipótese,

$$\oint_{[z_0, z] + [z, z+h] + [z+h, z_0]} f(\xi) d\xi = 0,$$

ou seja

$$\int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi + \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi + \int_{[z+h, z_0]} f(\xi) d\xi = 0,$$

ou ainda

$$F(z) + \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi - F(z+h) = 0.$$

Portanto

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua em z , seja $\delta > 0$ tal que $|\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$.
Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi - f(z) \int_{[z, z+h]} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\xi) - f(z)| |d\xi| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon \int_{[z, z+h]} |d\xi| = \varepsilon \end{aligned}$$

Pelo que $F'(z) = f(z)$, concluindo-se que $F(z)$ é analítica em V . Então, de acordo com o Corolário 9.4, f é analítica porque é a derivada de uma função analítica. ■

9.2 Funções Harmónicas

Definição 9.2 Uma função real u definida num aberto D de $\mathbb{R}^2$ é uma **função harmónica** se $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Designando por u e v , respectivamente, as partes real e imaginária da função $f = u + iv$, a equivalência entre funções analíticas e funções harmónicas é estabelecida nas seguintes afirmações:

- $f = u + iv$ analítica $\Rightarrow u$ harmónica (e também v harmónica)

Se $f = u + iv$ é analítica então, pelo Corolário 9.5, $u, v \in C^2$ e temos as equações de Cauchy Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\quad \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\quad \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Schwarz, sendo $u \in C^2$, temos $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$; pelo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Como v é a parte real de $-if$, concluímos que também v é harmónica.

Exemplo 9.3 De acordo com este resultado podemos garantir, sem calcular derivadas parciais, que a função $\operatorname{Re}(e^{z^2}) = \operatorname{Re}(e^{x^2-y^2+2ixy}) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$ é uma função harmónica, porque e^{z^2} é uma função analítica (composição das funções analíticas e^z e z^2).

- u harmónica $\Rightarrow \exists v : f = u + iv$ analítica.

Se u é harmónica, então $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ é um campo fechado; de facto, como $u \in C^2$, concluímos $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \in C^1$ e por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Então o campo $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ é um campo gradiente (localmente ou em conjuntos simplesmente conexos), pelo que existe um potencial $v \in C^1$ (único a menos de uma constante aditiva) tal que $\operatorname{grad} v = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, ou seja

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Concluindo-se que $f = u + iv$ é analítica. A função v assim determinada designa-se por **harmónica conjugada** de u e é única a menos de uma constante aditiva (localmente ou em conjuntos simplesmente conexos).

Exemplo 9.4 Considere-se a função $u(x, y) = 3xy^2 - x^3$. Temos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0$. Portanto u é harmónica e existe uma função harmónica conjugada v que satisfaz as equações $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2$. De facto da primeira equação obtemos $v = -3x^2y + g_1(y)$ e da segunda, $v = y^3 - 3x^2y + g_2(x)$. Comparando as últimas expressões concluímos $g_1(y) - y^3 = g_2(x) = \text{constante}$ (porque o lado esquerdo não depende de x e o direito não depende de y). Pelo que $v = y^3 - 3x^2y$ a menos de uma constante aditiva (real).