

6.1 Equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares. Analiticidade e derivada do logaritmo

Com objectivo de deduzir a analiticidade do logaritmo complexo, vamos exprimir as equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares.

Dada uma função complexa de variável complexa, podemos descrevê-la em termos de coordenadas polares da mesma forma que o fazemos em coordenadas cartesianas:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$f(\rho e^{i\theta}) = U(\rho, \theta) + iV(\rho, \theta).$$

Ou seja

$$U(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad \text{e} \quad V(\rho, \theta) = v(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Pela regra de derivação, da função composta temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Temos também as seguintes relações para a função mudança de coordenadas (ρ, θ) ¹:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

Note-se que estas equações são válidas apenas fora da linha de descontinuidade (por exemplo $\rho > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$, para o ramo principal).

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \theta - \rho \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \theta + \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \text{resolvendo em} \frac{\partial \rho}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial \theta}{\partial x} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos \theta - \rho \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ 1 = \frac{\partial \rho}{\partial y} \sin \theta + \rho \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \text{resolvendo em} \frac{\partial \rho}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial \theta}{\partial y} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho} \end{cases}$$

As equações de Cauchy-Riemann escrevem-se então

$$1. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}$$

Multiplicando a primeira por $\cos \theta$ e somando a segunda multiplicada por $\sin \theta$, i. e.

(1) $\cos \theta$ + (2) $\sin \theta$, obtemos (usando $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Da mesma forma, multiplicando a primeira por $\cos \theta$ e somando a segunda multiplicada por $\sin \theta$, i. e.

(1) $\sin \theta$ - (2) $\cos \theta$, obtemos

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \rho}$$

Facilmente verificamos que estas duas equações são equivalentes às equações de Cauchy Riemann em coordenadas cartesianas (fora da linha de descontinuidade). Obtivemos assim as **equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares**:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Por outro lado, se $f(z)$ é diferenciável, temos

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

pelo que, fazendo o limite direccional segundo a direcção do próprio ponto z (i. e. se $z = \rho e^{i\theta}$, faz-se $h = t e^{i\theta}$, com t real a tender para zero), obtemos

$$\begin{aligned} f'(z) = f'(\rho e^{i\theta}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\rho e^{i\theta} + t e^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})}{t e^{i\theta}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\rho + t) e^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})}{t} e^{-i\theta} \\ &= e^{-i\theta} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(\rho + t, \theta) + iV(\rho + t, \theta) - U(\rho, \theta) - iV(\rho, \theta)}{t} \\ &= e^{-i\theta} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(\rho + t, \theta) - U(\rho, \theta)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\rho + t, \theta) - V(\rho, \theta)}{t} \right) \\ &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i \frac{\partial V}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Utilizando as equações de Cauchy Riemann obtemos ainda as seguintes fórmulas para a derivada:

$$\begin{aligned} f'(\rho e^{i\theta}) &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i \frac{\partial V}{\partial \rho} \right), & f'(\rho e^{i\theta}) &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ f'(\rho e^{i\theta}) &= \frac{e^{-i\theta}}{\rho} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - i \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), & f'(\rho e^{i\theta}) &= e^{-i\theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} + i \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 6.1 *Apliquemos as equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares à função logaritmo.*

Temos $U = \log \rho$ e $V = \theta$. Então

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Concluimos (equações de Cauchy - Riemann e continuidade das derivadas parciais) que fora da linha de descontinuidade a (qualquer ramo da) função logaritmo é analítica (por exemplo o ramo principal do logaritmo é uma função analítica no domínio definido por $\rho > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$).

A derivada pode ser obtida por

$$\begin{aligned} (\log z)' &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \\ &= e^{-i\theta} \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

6.2 Exponenciação complexa.

Definição 6.1 *Dados $w \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ define-se*

$$z^w = e^{w \log z}$$

Se interpretarmos $\log z$ como um conjunto de valores, então também z^w será um conjunto de valores que diferem entre si pela multiplicação de um factor da forma

$$e^{ik2\pi w} \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 6.2 O símbolo $(1+i)^i$ designa os valores:

$$\begin{aligned}(1+i)^i &= e^{i \log(1+i)} \\ &= e^{i(\log \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + k2\pi))} \\ &= e^{i \log \sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)} \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)} \left(\cos \log \sqrt{2} + i \sin \log \sqrt{2} \right)\end{aligned}$$

Facilmente se verifica² que, com esta notação, $z^{-1} = e^{-\log z} = \frac{1}{z}$ e $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log z} = \sqrt[n]{z}$.

Se interpretarmos $\log z$ como um determinado ramo do logaritmo, então z^w será também uma função que em geral é descontínua sobre determinada linha de descontinuidade.

Note-se, que se fixarmos o ramo do logaritmo, temos³

$$z^{w_1} z^{w_2} = e^{w_1 \log z} e^{w_2 \log z} = e^{(w_1 + w_2) \log z} = z^{w_1 + w_2}.$$

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora da linha de descontinuidade:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} z^w &= \frac{d}{dz} e^{w \log z} \\ &= e^{w \log z} w \frac{d}{dz} \log z \\ &= z^w w \frac{1}{z} \\ &= w z^{w-1}.\end{aligned}$$

6.3 Funções trigonométricas inversas

Usando a logaritmo complexo é possível estender as funções trigonométricas inversas aos números complexos, obtendo-se fórmulas surpreendentes que permitem a dedução das fórmulas de derivação conhecidas da análise real.

²De facto

$$z^{-1} = e^{-\log z} = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}$$

e (mesmo interpretando $\sqrt[n]{z}$ e $z^{\frac{1}{n}}$ como um conjunto de valores, uma vez que os elementos de ambos conjuntos diferem por factores da forma $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, com $k \in \mathbb{Z}$)

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{n} \log z}\right)^n = e^{\log z} = z.$$

³No entanto se interpretarmos z^{w_1} e z^{w_2} como conjunto de valores, então em geral $z^{w_1} z^{w_2} \neq z^{w_1 + w_2}$; de facto (adoptando definições evidentes para a multiplicação de conjuntos) se $z = -1$ e $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}} &= \{-i, i\} \{-i, i\} = \{-1, 1\} \\ &\neq \{-1\} = (-1)^1 = (-1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Exemplo 6.3 Consideremos o caso $\arcsen z$. Tomando

$$w = \arcsen z$$

o ponto de partida será

$$\sen w = z.$$

Utilizando a definição da função de variável complexa $\sen w$, temos

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

Donde

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

e multiplicando por e^{iw} , obtemos

$$e^{i2w} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau em e^{iw} . Concluimos (interpretando $\sqrt{\cdot}$ e $\log$ como um conjunto de valores ou como um ramo predeterminado destas funções)

$$\begin{aligned} e^{iw} &= iz + \sqrt{(iz)^2 + 1} \\ &= iz + \sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

e

$$iw = \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Portanto, devemos tomar

$$\arcsen z = \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Podemos ver $\arcsen z$ como um conjunto de valores ou como uma função fixando o ramo das funções $\sqrt{\cdot}$ e $\log$.

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora das linhas de descontinuidade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \arcsen z &= \frac{d}{dz} \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \frac{d}{dz} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \left(i + \frac{1}{2} \frac{-2z}{\sqrt{1 - z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \frac{i\sqrt{1 - z^2} - z}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \frac{\sqrt{1 - z^2} + iz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \end{aligned}$$

Exemplo 6.4 Consideremos o caso $\operatorname{arctg} z$. Tomando

$$w = \operatorname{arctg} z,$$

o ponto de partida será

$$\operatorname{tg} w = z.$$

Então

$$\frac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{cos} w} = z$$

e utilizando a definição destas funções de variável complexa,

$$\frac{(e^{iw} - e^{-iw})/2i}{(e^{iw} + e^{-iw})/2} = z.$$

Resolvendo em ordem a e^{iw} , temos sucessivamente

$$e^{iw} - e^{-iw} = iz(e^{iw} + e^{-iw}),$$

$$e^{iw}(1 - iz) = (1 + iz)e^{-iw},$$

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{(1 + iz)^2}{1 + z^2},$$

donde

$$i2w = \log \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Portanto, devemos tomar⁴

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Podemos ver $\operatorname{arctg} z$ como um conjunto de valores ou como uma função fixando o ramo da função $\log$.

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora das linhas de descontinuidade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{arctg} z &= \frac{d}{dz} \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1 - iz}{1 + iz} \frac{d}{dz} \frac{1 + iz}{1 - iz} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1 - iz}{1 + iz} \frac{i(1 - iz) + i(1 + iz)}{(1 - iz)^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + iz} \frac{2i}{1 - iz} \\ &= \frac{1}{1 + z^2}. \end{aligned}$$

⁴Ou

$$\operatorname{arctg} z = \frac{-i}{2} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{-i}{2} \log \frac{i - z}{i + z} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}.$$