

4.1 Equações de Cauchy-Riemann. Condições necessárias para a diferenciabilidade

Se f é diferenciável num certo ponto z_0 então existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Note-se que $h \in \mathbb{C}$ e portanto $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ converge para $f'(z_0)$ independentemente da forma com que h converge para 0; isto é independentemente do percurso que h toma quando converge para 0. Em particular os limites direccionais têm de iguais segundo todas as direcções. Portanto, o valor $f'(z_0)$ pode ser calculado fazendo h tender para zero segundo o eixo real (direcção horizontal), ou segundo o eixo imaginário (direcção vertical), obtendo-se o mesmo resultado (na hipótese da existência da derivada $f'(z_0)$). Então (com $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ e $y_0 = \operatorname{Im} z_0$) se f é diferenciável em z_0 ,

1.

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t}$$

2.

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + t)) - f(x_0 + iy_0)}{it}$$

onde t é uma variável real (muda). Separando a parte real e a parte imaginária obtemos (com $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$):

1.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2. Analogamente

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Conclusão: se $f = u + iv$ é diferenciável no ponto $z = x_0 + iy_0$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Estas são designadas por **equações de Cauchy-Riemann**.

Mostrámos então o seguinte Teorema.

Teorema 4.1 *Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função diferenciável (no sentido complexo) no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, então as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy- Riemann no ponto (x_0, y_0) .*

Exemplo 4.1 *Vamos confirmar que a função $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável:*

$f(x + iy) = u + iv$, com $u = x$ e $v = -y$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$; as equações de Cauchy- Riemann não são satisfeitas (apesar de $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$).

Observação 4.1 *De acordo com as equações de Cauchy- Riemann, no caso de existir (esta é uma hipótese muito forte) a derivada de uma função complexa de variável complexa poder ser calculada, a partir das suas partes reais e imaginárias, usando qualquer das seguintes fórmulas:*

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ou} \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

4.2 Condições suficientes para a diferenciabilidade.

Teorema 4.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, u a parte real, v a parte imaginária de f e $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0 = \operatorname{Re} z_0$ e $y_0 = \operatorname{Im} z_0$) um ponto interior a D .*

Se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é tal que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0) e as suas derivadas parciais são funções contínuas neste mesmo ponto (x_0, y_0) , então f é diferenciável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$.

Observação 4.2 *Vamos utilizar apenas o facto de u e v serem diferenciáveis em (x_0, y_0) , o que é consequência de terem derivadas parciais contínuas neste ponto; de acordo com um teorema bem conhecido da análise em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. $h = t + ik$, $t = \operatorname{Re} h$ e $k = \operatorname{Im} h$; $|h| = \sqrt{t^2 + k^2} = \|(t, k)\|$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} [u(x_0 + t, y_0 + k) + iv(x_0 + t, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)] \\ &= \frac{1}{h} [u(x_0 + t, y_0 + k) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + t, y_0 + k) - v(x_0, y_0))]\end{aligned}$$

usando a diferenciabilidade de u e v no ponto (x_0, y_0) , vem¹

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) t + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) k + o(|h|) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{h} i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) t + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) k + o(|h|) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[t \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(t \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} \right) + o(|h|) \right] \end{aligned}$$

omitindo o ponto (x_0, y_0) onde todas as derivadas parciais são calculadas. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[t \frac{\partial u}{\partial x} - k \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(t \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + o(|h|) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[(t + ik) \frac{\partial u}{\partial x} + (-k + it) \frac{\partial v}{\partial x} + o(|h|) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[(t + ik) \frac{\partial u}{\partial x} + i(ik + t) \frac{\partial v}{\partial x} + o(|h|) \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(|h|)}{h}. \end{aligned}$$

O termo $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ não depende de h e $\frac{o(|h|)}{h} = \frac{o(|h|)}{|h|} \frac{|h|}{h}$ converge para zero (quando $h \rightarrow 0$) porque $\left| \frac{|h|}{h} \right| = 1$. Pelo que existe o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$. ■

Exemplo 4.2 A função exponencial e^z é diferenciável em todo o plano complexo. Temos $e^z = u + iv$, com $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e as derivadas parciais de u e v são contínuas, concluindo-se que e^z é diferenciável em todo o plano complexo e

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Exercício 4.1 Mostre que se a derivada de uma função de variável complexa é nula num conjunto aberto conexo, então a função é constante nesse conjunto.

¹ $o(|h|)$ designa uma função desconhecida g (neste caso g depende de z_0 e de h) que satisfaz a seguinte propriedade

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{g}{|h|} = 0.$$

4.3 Funções analíticas.

Observação 4.3 Comparem-se os Teoremas 4.1 e 4.2. Estes resultados não são exactamente o recíproco um do outro. Contudo, é possível demonstrar que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável num aberto D sse u e v satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe C^1 nesse mesmo aberto (identificando naturalmente os subconjuntos $\mathbb{C}$ e de $\mathbb{R}^2$).

Definição 4.1 Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** (ou **analítica**)² sse for diferenciável em todos os pontos de D e sua derivada f' for contínua em D ³.

Consequência imediata desta definição e dos Teoremas 4.1 e 4.2 é que: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica num aberto D sse u e v satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe C^1 . De facto se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável, então

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

pelo que, se a derivada f' for contínua, u e v são de classe C^1 .

Definição 4.2 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** (ou **analítica**) em $F \subset D$ sse existe um conjunto aberto A tal que $F \subset A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica. (mais precisamente, se a restrição de f a $A \cap D$ admite uma extensão a A que seja analítica no sentido da definição 4.1)

Definição 4.3 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** (ou **analítica**) em $z \in D$ se é analítica em $\{z\}$ de acordo com a definição 4.2.

Imediatamente se reconhece que, de acordo com os resultados semelhantes para funções contínuas e pontualmente diferenciáveis, a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analíticas é ainda uma função analítica no interior do seu domínio. Esta observação permite reconhecer funções analíticas sem necessidade de efectuar cálculos.

Assim reconhecemos que qualquer polinómio é uma função⁴ analítica em $\mathbb{C}$. Do mesmo modo qualquer função racional (quociente de polinómios) é analítica no seu domínio (o plano complexo excepto os zeros do denominador). Por outro lado, pelo Exemplo 4.2, a função exponencial é também analítica em todo plano complexo. Com base nestas funções é possível construir uma miríade de funções analíticas.

² Alguns autores definem de forma distinta as funções holomorfas (definições semelhantes à aqui enunciada) e as funções analíticas (definições ligadas ao desenvolvimento em séries de potências). Contudo à posteriori mostram que as funções são holomorfas sse são analíticas.

³ Usualmente definem-se as funções holomorfas (ou as analíticas) sem pedir a continuidade da derivada da função, mostrando-se à posteriori que qualquer função holomorfa (analítica) tem derivada contínua. Esta abordagem usual implica uma teoria mais elaborada do que a que expomos neste curso. Aquilo que se perde é apenas que neste curso não se mostra que a definição usual é equivalente à aqui utilizada.

⁴ As funções analíticas em todo plano complexo designam-se por **funções inteiras**.

Exemplo 4.3 A função $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$. De facto, a função $z \rightarrow \frac{z^2+1}{z-3i}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$, porque é uma função racional, e $f(z)$ é a composição desta função com a função exponencial; portanto a composição de funções analíticas. A sua derivada calcula-se de acordo com as regras mencionadas:

$$f'(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \left(\frac{z^2+1}{z-3i} \right)' = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \frac{2z(z-3i) - (z^2+1)}{(z-3i)^2} = \frac{z^2 - 6iz - 1}{(z-3i)^2} e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$$

Exemplo 4.4 As funções $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ são analíticas (soma e composição de funções analíticas). De acordo com as fórmulas de Euler, quando restringidas ao eixo real estas funções coincidem com as funções coseno e seno, respectivamente. Pelo que é natural definir

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

O calculo da derivada destas (novas) funções definidas em todo plano complexo obtém-se pela regra da derivação da soma e da composição de funções:

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} \\ &= i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{(e^{iz})' - (e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5 A analiticidade da função $f(z) = |z^2 - \bar{z}^2| + i(z^2 + \bar{z}^2)$ já não pode ser estudada do mesmo modo uma vez que a função $z \rightarrow \bar{z}$ não é analítica. Mas, com $z = x + iy$, vem $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e, portanto,

$$f(x + iy) = |4ixy| + i2(x^2 - y^2) = 4|xy| + i2(x^2 - y^2).$$

Designando por u e v as partes real e imaginária de f , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 4 \frac{|xy|}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 4 \frac{|xy|}{y} \quad \text{se } y \neq 0 \quad e \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x. \end{aligned}$$

Pelo que as equações de Cauchy Riemann não são verificadas para $xy > 0$; mas são satisfeitas na região definida por $xy < 0$ e as derivadas parciais de u e v são contínuas nesta região aberta. Concluimos, portanto que a função deste exemplo é analítica no aberto: $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z < 0\}$.

4.4 Funções elementares

Para além dos polinómios, funções racionais e função exponencial, é útil conhecer outras funções analíticas definidas no plano complexo à custa da função exponencial e que generalizam funções conhecidas da análise real.

Definição 4.4 Para $z \in \mathbb{C}$, define-se

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \text{e} & \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.\end{aligned}$$

Imediatamente reconhecemos as fórmulas de Euler e as seguintes relações:

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz) \tag{4.1}$$

e

$$\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz).$$

Percebe-se agora, no contexto da análise complexa, porque a cada relação entre funções trigonométricas está associada uma relação entre funções hiperbólicas correspondentes, que é idêntica a menos de alguns sinais. Por exemplo:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \text{corresponde a} \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Da definição de exponencial podemos obter a representação em séries de potências destas funções trigonométricas; por exemplo:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, ou utilizando as relações 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, & \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \operatorname{ch} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} & \text{e} & \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}.\end{aligned}$$

A derivada destas funções pode ser obtida da derivada da exponencial, por exemplo:

$$\begin{aligned}
(\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} \\
&= \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\
&= -\frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\operatorname{sen} z.
\end{aligned}$$

Obtemos assim as seguintes regras já conhecidas dos cursos de análise real:

$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z \quad (\operatorname{sen} z)' = \cos z$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

Outras funções (trigonométricas) úteis devido ao seu significado geométrico são

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

e as suas correspondentes hiperbólicas

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} \quad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}.$$

Outro aspecto que convém notar é de que os zeros das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ se situam sobre o eixo real e, portanto, são os zeros destas funções que conhecemos da análise real. De facto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{i2z} = 1 \\
&\Leftrightarrow i2z = i2k\pi \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow z = k\pi \quad \text{com } k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos z &= 0 \Leftrightarrow e^{i2z} = -1 \\
&\Leftrightarrow i2z = i\pi + i2k\pi \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Somando, multiplicando, dividindo e compondo funções elementares obtemos novas funções elementares que são analíticas no seu domínio e podem ser derivadas segundo as regras habituais:

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f g)' = f' g + f g',$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}, \quad (f \circ g)' = f' \circ g g'.$$