2 ª Aula 2006.09.15 AMIV LEA; LEN; LEMAT; LEM Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

2.1 Fórmula de De Moivre.

Dado $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \in \mathbb{C}$, temos

$$z^2 = \rho e^{i\theta}\rho e^{i\theta} = \rho^2 e^{i2\theta}$$

e

$$z^3 = zz^2 = \rho e^{i\theta}\rho^2 e^{i2\theta} = \rho^3 e^{i3\theta}.$$

Concluímos por indução que

$$z^n = \rho^n e^{in\theta},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e como $\rho^n e^{in\theta}\rho^{-n}e^{-in\theta} = \rho^{n-n}e^{in\theta-in\theta} = \rho^0 e^0 = 1$, podemos mesmo pôr $n \in \mathbb{Z}$. Mostrámos portanto a fórmula de De Moivre:

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

Exemplo 2.1 *Pela fórmula de De Moivre temos*

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)^4 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi,$$

ou seja

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -1.$$

De facto

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\right)^2 = i^2 = -1.$$

Vamos agora resolver o seguinte problema:

Dados um número complexo $w = re^{i\alpha}$ e um número natural n, determinar os números complexos $z = \rho e^{i\theta}$ tais que $z^n = w$, ou seja determinar $\sqrt[n]{w}$.

Temos então

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha}.$$

Pelo que (porque $|z^n| = |w|$)

$$\rho^n = r$$

e consequentemente

$$e^{in\theta} = e^{i\alpha},$$

ou seja

$$\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Portanto

$$\begin{cases} \cos n\theta = \cos\alpha \\ \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\alpha \end{cases},$$

pelo que

$$n\theta = \alpha + k2\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Obtém-se

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Concluímos

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \sqrt[n]{re^{i(\alpha+k2\pi)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},$$

com $k = 0, 1, ..., n-1$, uma vez que $e^{i(k+n)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\left(k\frac{2\pi}{n}+2\pi\right)} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}e^{i2\pi} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

Verificamos que a raiz n de um número complexo é um conjunto de n valores complexos.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ é utilizado para representar duas entidades distintas: um conjunto de números complexos z tais que $z^n = a$; ou , no caso de a ser um número real positivo, o (único) número real positivo x tal que $x^n = a$.

Exemplo 2.2 *Cálculo de* $\sqrt[3]{32\sqrt{3}+i32}$

Seja $\omega = 32\sqrt{3} + i32$. *Então*

$$\begin{aligned} |\omega| &= \sqrt{(32)^2\,3 + (32)^2} \\ &= 32\sqrt{3+1} \\ &= 64, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 64\frac{32\sqrt{3}+i32}{64} \\ &= 64\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ &= 64\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{\omega} = \sqrt[3]{64}\, e^{i\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\, e^{i\left(\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2.$

Exemplo 2.3 *Vamos calcular* $\sqrt[4]{1}$ *entendido como um conjunto de números complexos:*

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1e^{ik2\pi}} = e^{ik\frac{\pi}{2}},$$

com $k = 0, 1, 2, 3$. *Ou seja* $\sqrt[4]{1} = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$.

Exemplo 2.4 *Vamos calcular* $\sqrt[4]{-1}$ *entendido como um conjunto de números complexos, ou seja como o conjunto das soluções complexas da equação* $z^4 + 1 = 0$*:*

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1e^{i(\pi+k2\pi)}} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{ik\frac{\pi}{2}},$$

com $k = 0, 1, 2, 3$. *Como* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, *obtemos*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 + 1 = 0\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Exemplo 2.5 *As duas raizes quadradas de um número complexo são simétricas em relação à origem:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{z} &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z + k2\pi}{2}} \qquad \textit{com } k=0,1 \\
&= \sqrt{|z|}e^{i\left(\frac{\arg z}{2}+k\pi\right)} \\
&= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}e^{ik\pi} \\
&= \pm\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}},
\end{aligned}$$

visto que $e^{ik\pi}=1$ *se* $k=0$ *, mas* $e^{ik\pi}=-1$ *se* $k=1$.

2.2 Fórmulas de Euler.

Como consequência imediata da definição $e^{i\theta}=\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, temos

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\, e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}+\overline{e^{i\theta}}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{Im}\, e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}-\overline{e^{i\theta}}}{2i},$$

ou seja

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

conhecidas como Fórmulas de Euler. Estas fórmulas têm um significado profundo que se tornará claro mais adiante. No entanto, mesmo do ponto de vista formal, são úteis na manipulação de funções trigonométricas (usadas em conjunção com as propriedades $e^0=1$ e $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$).

Exemplo 2.6

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} - \frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right) \\
&= \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)}{2}
\end{aligned}$$

2.3 Noção de convergência no plano complexo.

Dada uma sucessão de números complexos z_n dizemos que z_n converge para o número complexo w se

$$\lim_{n\to\infty}|z_n - w| = 0$$

e neste caso escrevemos $w=\lim_{n\to\infty} z_n$ ou $z_n \to w$.

Uma vez que $|z_n - w|$ é a distância entre os pontos z_n e w, a convergência de números complexos é equivalente à convergência de pontos no plano. Ou seja a topologia de $\mathbb{C}$ é equivalente à topologia em $\mathbb{R}^2$. Em particular uma sucessão z_n é convergente sse a sua parte real e sua parte imaginária formarem sucessões (reais) convergentes.

Exemplo 2.7 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + i\frac{n}{2n+1} \to w = e + i\frac{1}{2}$.

Podemos também considerar séries de números complexos:

Dada a sucessão $u_n \in \mathbb{C}$, defina-se a sucessão (de somas parciais)

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Dizemos que a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge se a sucessão de somas parciais z_N for convergente e neste caso $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{N\to+\infty} z_N$.

Ainda no mesmo contexto, defina-se $a_n = \operatorname{Re}(u_n)$ e $b_n = \operatorname{Im}(u_n)$. Então temos

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + i\sum_{n=0}^{N} b_n.$$

Pelo que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge sse as séries reais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergirem simultaneamente e neste caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposição 2.1 *Dada uma sucessão $u_n \in \mathbb{C}$ tal que a série (real de termos não negativos) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ é convergente, então a série (complexa) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ é convergente.*

Ou seja, para que uma série seja convergente é suficiente a convergência da série dos módulos.

Demonstração. *Seja $a_n = \operatorname{Re}(u_n)$ e $b_n = \operatorname{Im}(u_n)$. Temos*

$$|a_n| \leqslant |u_n| \quad e \quad |b_n| \leqslant |u_n|,$$

donde, pelo critério da comparação, as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|,$$

são convergentes. Concluímos que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ são (absolutamente) convergentes e portanto $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ é convergente. ■

2.4 Função exponencial

Definição 2.1

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

Com a função exponencial assim definida estendemos naturalmente a todo o plano complexo a função exponencial real de variável real já nossa conhecida dos cursos de cálculo elementar.

Note-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!} z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n = e^{|z|}$, pelo que a série que define e^z é sempre convergente.

Proposição 2.2 *De acordo com definição 2.1 temos*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. *De acordo com definição 2.1 temos*

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\,(i^2)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

■

Consequentemente temos agora uma justificação mais profunda para a relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e uma significação mais transcendente das fórmulas de Euler.

Com uma demonstração formalmente igual à que é conhecida para a função exponencial real de variável real, pode-se mostrar que [1]:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\
&= e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

---

[1]

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} z_1^{n-k} \frac{1}{k!} z_2^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n = e^{z_1} e^{z_2}
\end{aligned}$$