

# ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Exame do 2º semestre de 05/06

curso: LEC

Data: 04 de Julho de 2006

Duração: 3h00.

|               |
|---------------|
| Nome: _____   |
| Número: _____ |

|                |
|----------------|
| Registo: _____ |
| Nota: _____    |

|    |         |          |   |     |  |     |  |     |  |     |  |
|----|---------|----------|---|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|
| EM | Certas: | Erradas: | I | 11. |  | 12. |  | 13. |  | 14. |  |
|----|---------|----------|---|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|

**Cotação** das perguntas de escolha múltipla: Certa: 1,2 v. Vazia: 0,0 v. Errada: -0,4 v.  
Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, máquinas calculadoras ou telemóveis. Desligue e guarde o seu telemóvel.

1. Diga qual das funções seguintes é solução da equação  $\frac{d^5 y}{dt^5} + \frac{d^2 y}{dt^2} = t$ . [1,2 v.]

- ☐  $y(t) = e^{-t} + t$   
☐  $y(t) = t e^{-t} + t$   
☐  $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 1 + \frac{t^3}{6}$   
☐  $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + t + \frac{t^3}{6}$

2. Sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz  $2 \times 2$  tal que  $e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}$ , então a solução  $\mathbf{y}(t)$  [1,2 v.]  
do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{é:}$$

- ☐  $\begin{bmatrix} t-1 \\ \frac{t-1}{2} \end{bmatrix}$       ☐  $\begin{bmatrix} t^2-1 \\ \frac{t^2-1}{2} \end{bmatrix}$       ☐  $\begin{bmatrix} t^2 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$       ☐  $\begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ \frac{(t-1)^2}{2} \end{bmatrix}$

3. A série de Fourier da função  $f(x) = \cos^3 x$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , é: [1,2 v.]

- ☐  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n+1}}{4} \cos[(2n+1)x].$       ☐  $\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$   
☐  $\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n+1}}{4} \cos[(2n+1)x].$       ☐  $\frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \cos 3x.$

4. Indique o valor do integral [1,2 v.]

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

$$\square I = \frac{\pi}{5}$$

$$\square I = \frac{\pi}{3}$$

$$\square I = \frac{\pi}{4}$$

$$\square I = \frac{\pi}{6}$$


---

5. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função [1,2 v.]

$$f(z) = \frac{1}{2z^3 - 4iz^2 - 2z} - ze^{\frac{1}{z}}.$$

I.  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1.$

II.  $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 1.$

III.  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$

IV.  $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2}.$

A lista completa de afirmações correctas é:

$$\square \text{ I e II}$$

$$\square \text{ I e IV}$$

$$\square \text{ III e IV}$$

$$\square \text{ II e III.}$$


---

6. Seja  $u(t, x) = T(t)X(x)$  uma solução separada (não trivial) do problema [1,2 v.]

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u \\ u(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Então, com  $n \in \mathbb{N}_0$  e a menos de uma constante multiplicativa, temos:

$$\square X(x) = e^x \sin^3(nx)$$

$$\square X(x) = e^{-x} \cos(nx)$$

$$\square X(x) = e^x \cos(nx)$$

$$\square X(x) = e^{-x} \sin^3(nx)$$


---

7. Sendo  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ , então  $e^{\mathbf{A}t}$  é: [1,2 v.]

$$\square e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

$$\square e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t - 3 \sin t \end{bmatrix}$$

$$\square e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

$$\square e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$


---

8. Considere a função  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ . Diga qual o desenvolvimento de  $f(z)$  em série [1,2 v.]  
de Laurent convergente na região  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2| < 3\}$ .

☐  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n$   
☐  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} (1-n) (z-2)^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{3}\right)^n (n+1) (z-2)^n$   
☐  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n$   
☐  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$

9. Considere uma função  $f(z)$  analítica em  $\mathbb{C}$ , cuja parte real é  $u(x, y) = x^2 - y^2 - xy$ . [1,2 v.]  
Sendo  $C$  a circunferência de centro na origem e raio 2 percorrida no sentido positivo, determine o valor do integral:

$$I = \oint_C \frac{f(z^2)}{(z-i)^2} dz$$

- I.  $I = i2\pi f'(-1)$ .  
 II.  $I = -4\pi f'(-1)$ .  
 III.  $I = 8\pi + i4\pi$ .  
 IV.  $I = 2\pi - i4\pi$ .

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e IV                      ☐ II e III                      ☐ II e IV                      ☐ I e III.

10. Considere a lista de afirmações seguintes relativas ao problema de valor inicial [1,2 v.]

$$t y^2 + t^3 - 2t + y y' = 0 \quad \text{com} \quad y(1) = -\sqrt{2}.$$

- I. Um factor de integração da equação diferencial é  $e^{t^2}$ .  
 II. O intervalo máximo de definição da solução é  $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ .  
 III. Um factor de integração da equação diferencial é  $e^{-t^2}$ .  
 IV. O intervalo máximo de definição da solução é  $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ .

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e II                      ☐ I e IV                      ☐ III e IV                      ☐ II e III.

\*

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

\*

Escreva a tinta escura e claramente.

Identifique com o nome e número todas as folhas do caderno de respostas.

11. Determine uma função  $y(t)$  limitada e diferenciável em  $\mathbb{R}$  que é solução da equação [2,0 v.]

$$(1 - t^2) y y' = 2t (1 - y^2),$$

e que satisfaz a condição inicial  $y(0) = 0$ . A solução é única?

12. Determine a solução  $u(t, x)$  do seguinte problema: [2,0 v.]

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u + e^x \sin^3 x \\ u(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = e^{-x} \cos^3 x - e^x \sin^3 x. \end{cases}$$

**Note:** pode (e deve) utilizar as respostas das questões **6** e **3**.

13. Sendo  $C$  a elipse  $|z| + |z - 2\pi| = 3\pi$  percorrida uma vez no sentido positivo, [2,0 v.]  
calcule o integral

$$\oint_C \frac{z}{e^{iz} - e^z} dz.$$

14. Utilize métodos de redução de ordem para calcular as soluções dos seguintes problemas de valor inicial, indicando o respectivo intervalo máximo de definição.

(a)  $y'' = 2yy'$ , com  $y(0) = y'(0) = 1$ . [1,0 v.]

(b)  $y'' = 2e^{t^2} + 2ty'$ , com  $y(0) = y'(0) = 0$ . [1,0 v.]