

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Exame do 2º semestre de 05/06

curso: LEC

Data: 20 de Junho de 2006

Duração: 3h00.

Nome: _____
Número: _____

Registo: _____
Nota: _____

EM	Certas:	Erradas:	I	11.		12.		13.		14.	
----	---------	----------	---	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--

Cotação das perguntas de escolha múltipla: Certa: 1,2 v. Vazia: 0,0 v. Errada: -0,4 v. Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, máquinas calculadoras ou telemóveis. Desligue e guarde o seu telemóvel.

1. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função [1,2 v.]

$$f(x + iy) = e^{-y} (x \cos x - y \sin x) + i e^{-y} (y \cos x + x \sin x).$$

- I. f satisfaz as equações de Cauchy Riemann.
II. f não é analítica em $\mathbb{C}$.
III. $f'(x + iy) = e^{-y} [(1 - y) \cos x - x \sin x] + i [x \cos x + (1 - y) \sin x]$.
IV. $f'(x + iy) = e^{-y} [(1 - y) \cos x - x \sin x] + i [(1 - y) \cos x - x \sin x]$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e IV ☐ II e III ☐ II e IV ☐ I e III.

2. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$. Diga qual o interior da região de convergência [1,2 v.]
do desenvolvimento de $f(z)$ em série de Laurent centrado no ponto $z = 1 - i$ que é convergente no ponto $z = i$.

- ☐ $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1 + i| < 2\}$
☐ $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\}$
☐ $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1 + i|\}$
☐ $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\}$

3. Diga qual das funções seguintes é solução da equação $\frac{d^4 y}{dt^4} + 4y = 5e^{2t}$. [1,2 v.]

- ☐ $y(t) = e^t \sin(\frac{t}{2}) + \frac{1}{4}e^{2t}$
☐ $y(t) = t^2 e^{2t} + \frac{t}{20}e^{2t}$
☐ $y(t) = e^t \sin(t) + \frac{1}{4}e^{2t}$
☐ $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) + \frac{t}{20}e^{2t}$

4. Para o integral

[1,2 v.]

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \sin 3\theta} d\theta$$

diga qual das igualdades seguintes é verdadeira:

☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^{-3} - 4i} dz.$

☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{-8(z^3 + z)}{z^6 - 3z^4 - 16iz^3 + 3z^2 - 1} dz.$

☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z}{z^6 + 4iz^3 - 1} dz.$

☐ $I = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z}{z^6 - 3z^4 - 1} dz.$

5. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x' = 3x - y + \sin t \\ y' = 2x - e^t \end{cases}$. [1,2 v.]

Então

☐ $y'' - 3y' + 2y = 2e^t + 2 \sin t.$

☐ $y'' - 3y' + y = 2e^t + 2 \sin t.$

☐ $y'' - 3y' + y = e^t + \sin t.$

☐ $y'' - 3y' + 2y = e^t + \sin t.$

6. Diga qual das seguintes equações admite o factor de integração e^{y^2} . [1,2 v.]

☐ $2te^{t^2} + (y^2 + ye^{t^2} + 1)y' = 0$

☐ $e^{t^2} + (2y^2 + 2ye^{t^2} + 1)y' = 0$

☐ $2te^{t^2} + (2y^2 + 2ye^{t^2} + 2)y' = 0$

☐ $e^{t^2} + (y^2 + ye^{t^2} + 1)y' = 0$

7. Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então $e^{\mathbf{A}t}$ é: [1,2 v.]

☐ $\begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - e^{2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 5e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 5e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$

8. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função [1,2 v.]

$$f(z) = \frac{e^z \operatorname{sen}(iz)}{z(e^z + 1)^2}.$$

- I. f tem um pólo simples em $z = -i\pi$.
- II. f tem uma singularidade essencial em $z = 0$.
- III. f tem um pólo duplo em $z = i\pi$.
- IV. f tem uma singularidade removível em $z = 0$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e II ☐ I e IV ☐ III e IV ☐ II e III.
-

9. Seja $u(t, x) = T(t)X(x)$ uma solução separada (não trivial) do problema [1,2 v.]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(t, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Então, com $n \in \mathbb{N}_0$ e a menos de uma constante multiplicativa, temos:

- ☐ $X(x) = e^x \operatorname{sen}(2nx)$
 - ☐ $X(x) = e^x \cos(nx)$
 - ☐ $X(x) = e^{2x} \cos(2nx)$
 - ☐ $X(x) = e^{2x} \cos(nx)$
-

10. A série de Fourier da função $f(x) = \pi - |x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é: [1,2 v.]

- ☐ $\frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}[2n\pi x].$
 - ☐ $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$
 - ☐ $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$
 - ☐ $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos[2nx].$
-

* Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes *

Escreva a tinta escura e claramente.

Identifique com o nome e número todas as folhas do caderno de respostas.

11. Determine a função $y(t)$ diferenciável em $\mathbb{R}$ que é solução da equação [2,0 v.]

$$4y - 3t y' = t,$$

e que satisfaz (simultaneamente) as condições

$$y(-1) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 0.$$

Justifique a unicidade da solução.

12. Determine a solução contínua $u(t, x)$ do seguinte problema: [2,0 v.]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + e^x \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\\ u(t, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = (\pi + 1 - x) e^x \quad \text{para } x \in]0, \pi[. \end{array} \right.$$

Note: pode (e deve) utilizar as respostas das questões **9** e **10**.

13. Sendo C a elipse $|z - 1| + |z - 2| = 4$ percorrida uma vez no sentido positivo, [2,0 v.]
calcule o integral

$$\oint_C \frac{1}{z^5 - iz^4 - z^3 + iz^2} dz.$$

14. Considere o problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 + 2(y^2 + y - e^{-t}) y' = 0 \\ y(0) = -1 \end{array} \right.$$

- (a) Mostre que e^{t+2y} é um factor de integração da equação diferencial. [0,5 v.]
(b) Determine a solução do problema e o seu intervalo máximo de definição. [1,5 v.]