

Análise Matemática IV

LEC

2º Semestre de 2005/06

Problemas para a aula prática

13ª Semana

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0 \\ 0 & \text{se } \sin x \leq 0 \end{cases}$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$ numa série de cossenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Utilizando o método da separação de variáveis, determine uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 3u,$$

que satisfaz as condições fronteira $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ e a condição inicial

$$u(0, x) = x(\pi - x) \quad \text{para } x \in [0, \pi].$$

7. Utilizando o método de separação de variáveis, obtenha a solução formal do seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \sin t & \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in]0, 2\pi[\\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = |x - \pi| - \pi & \text{para } x \in]0, 2\pi[\end{cases}$$