

Análise Matemática IV

LEC

2º Semestre de 2005/06

Problemas para a aula prática

6ª Semana

1. Calcule:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2} - 1} dz,$$

onde C é a circunferência $|z| = \sqrt{7}$ percorrida no sentido positivo.

2. Utilize o Teorema dos Resíduos para obter os seguintes valores:

$$\text{a) } \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2} + \cos(\theta)} d\theta = -\pi (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{(5 - 4\cos(\theta))^2} d\theta = \frac{7}{54}\pi \quad (\text{Sugestão: } \cos(3\theta) = \text{Re}(e^{i3\theta}))$$

3. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{12}\pi$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{\pi}{54}$$

4. Com base no Teorema dos Resíduos e no Lema de Jordan, obtenha os seguintes resultados:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

5. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4 + 1}{z^2 (2z^2 + 5z + 2)} dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorrida no sentido positivo. Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

6. Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx,$$

onde n é um natural maior ou igual que 2.

Sugestão: Considere a fronteira da região $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in]0, R[, \theta \in]0, \frac{2\pi}{n}[\}$, com $R > 1$.

7. Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função

$$g(z) = (z - z^3) e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida no sentido positivo.

8. Considere a função $f(z) = \frac{2z+1}{\sin(2\pi z)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$.

a) Determine o interior da região de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(i8)^n} z^{3n-4}$.

b) Indique e classifique as singularidades da função $f(z)$ situadas no círculo $|z| < 1$.

c) Calcule os resíduos de $f(z)$ nestas singularidades.

d) Indique os possíveis valores para o integral de f ao longo de curvas fechadas simples seccionalmente regulares contidas no círculo $|z| < 1$.

9. Seja $f(z) = \frac{z \sin(z)}{\cos(z) - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $z \sin(z)$ em potências de $z - 2\pi$.

b) Determine o interior da região de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z - 4i)^{k-1}}$.

c) Classifique, justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.

10. Seja f uma função complexa de variável complexa. Mostre que se

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+1) \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n+1)}(z_0)} \right| \right)$$

existir e for finito, então f tem uma singularidade não removível num ponto z tal que $|z - z_0| = L$.