

Análise Matemática IV

LEC

2º Semestre de 2005/06

Problemas para a aula prática

5ª Semana

1. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

- a) Determine o seu raio de convergência.
- b) Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f , analítica em todo o seu domínio aberto e conexo, calcule $f(1)$.
2. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:
- a) $\sin z$, em torno de $z = \pi$.
- b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.
- c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
- d) $\frac{1}{z-1}$, em torno de $z = 2 + 3i$.
- e) $\frac{1}{(z-i)^2}$, em torno de $z = 0$.
- f) $\frac{1}{(z-1-i)^3}$, em torno de $z = i$.
3. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.
4. Para cada função e região indicadas, determine os desenvolvimentos de Laurent:
- a) $\frac{1}{z-1}$, na região $|z| > 1$.
- b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, na região $|z| > 0$.
- c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, na região $|z-i| > 1$.

d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, na região $|z| > 0$.

5. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ nas seguintes regiões:

a) $0 < |z - 1| < 2$;

b) $2 < |z - 1|$.

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$;

b) $\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$.

6. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{((z-i)^2 + (z-i) - 6)(z-i)^{20}} dz .$$

Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2 + \xi - 6}$ em série de potências de ξ .

7. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

a) $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}$.

b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}$.

c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}$.

d) $f_4(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{(z - \pi)^6}$.

e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$.

f) $f_6(z) = \frac{1 - \cos z}{z \operatorname{sen} z}$.

g) $f_7(z) = \frac{z - \pi/2}{\cos z}$.

h) $f_8(z) = \frac{1 + z}{z^2 - z^4} + z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}$.

8. Justifique que a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}$$

tem uma singularidade em $z = 0$ que **não é isolada** .

9. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular (considere sempre as curvas indicadas percorridas uma vez no sentido positivo)

a) $\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz$.

b) $\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)} dz$.

c) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz$.