

# Análise Matemática IV

LEC

2º Semestre de 2005/06

Problemas para a aula prática

## 3ª Semana

1. Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$ .
  - a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde  $f$  é diferenciável no sentido complexo, bem como o seu domínio de analiticidade.
  - b) Mostre que  $f$  aplica circunferências centradas na origem e de raio  $r$  em circunferências centradas na origem de raio  $r'$ . Para que valores de  $r$  se tem  $r = r'$ ?
2. Seja  $f$  uma função analítica que verifica, num aberto conexo  $D$ ,  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in D$ . Mostre que  $f$  é constante em  $D$  (sug.: deve mostrar que tanto a parte real como a parte imaginária de  $f$  são constantes enquanto funções das variáveis  $x, y$ ).
3. Estabeleça as seguintes identidades (onde  $z = x + iy$ ):
  - a)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
  - b)  $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
  - c)  $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
  - d)  $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$
  - e)  $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$
  - f)  $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y$
4. Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = \rho \log \rho \cos \theta - \rho \theta \sin \theta + i(\rho \log \rho \sin \theta + \rho \theta \cos \theta),$$

com  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$  e  $0 < \theta < 2\pi$ . Calcule  $h'(z)$ .

5. Calcule todos os valores possíveis para as seguintes expressões:
  - a)  $\log(-1)$
  - b)  $i^i$
  - c)  $(1 + i)^{1-i}$
  - d)  $2^i$

6. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a)  $\cos z = 2$

b)  $z^{2i} - 2z^i + 2 = 0$

7. Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

**Sug:** Use as fórmulas de Euler na relação  $\operatorname{sen} w = z$  para determinar  $e^w$  em função de  $z$ , onde  $w = \operatorname{arcsen} z$ .

8. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} (1 + i2t) e^{t+it^2} dt.$$

Utilizando o resultado anterior indique o valor dos integrais:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (\cos t^2 - 2t \operatorname{sen} t^2) dt \quad \text{e} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} e^t (2t \cos t^2 + \operatorname{sen} t^2) dt$$

9. Mostre que

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{2 \cos t^2 + i2 \operatorname{sen} t^2 - 1} dt \right| \leq 1.$$

10. Considere o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1] \\ e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} & \text{se } t \in [1, 2] \\ i(3-t) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Usando o ramo principal do logaritmo, calcule o integral

$$\int_0^3 \gamma(t) \log \gamma(t) \gamma'(t) dt.$$

**Observação:** Este integral é

$$\int_C z \log z dz,$$

onde  $C$  é a curva orientada parametrizada pelo caminho  $\gamma(t)$ .