

A função $\frac{1}{e^{z^2}-1}$ tem singularidades apenas nos pontos $z = w$, onde w é solução da equação $e^{w^2} - 1 = 0$. Portanto (com $k \in \mathbb{Z}$)

$$w^2 = 2\pi i k.$$

Estas singularidades estão na região delimitada por C apenas quando $|k| \leq 1$; de facto $|w| = \sqrt{|2\pi i k|} = \sqrt{2\pi |k|}$ e

$$\sqrt{2\pi |k|} < \sqrt{7} \Leftrightarrow |k| \leq \frac{7}{2\pi};$$

como $1 < \frac{7}{2\pi} < 2$, obtemos $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Seja w tal que $w^2 = 2\pi i k$ com $|k| = 1$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow w} \frac{(z-w)}{e^{z^2}-1} &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{2ze^{z^2}} \\ &= \frac{1}{2we^{w^2}} \\ &= \frac{1}{2w}. \end{aligned}$$

Pelo que, neste caso $z = w$ ($\neq 0$) é um pólo de 1ª ordem e $\text{Res}_{z=w} \frac{1}{e^{z^2}-1} = \frac{1}{2w}$.

Fixando $z_0 = \sqrt{\pi}(1+i)$, as soluções de $w^2 = 2\pi i$ são $w = z_0$ e $w = -z_0$; e as soluções de $w^2 = -2\pi i$ são $w = \bar{z}_0$ e $w = -\bar{z}_0$. Pelo que, com $f(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}$,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \left(\text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=z_0} f(z) + \text{Res}_{z=-z_0} f(z) + \text{Res}_{z=\bar{z}_0} f(z) + \text{Res}_{z=-\bar{z}_0} f(z) \right) \\ &= 2\pi i \left(\text{Res}_{z=0} f(z) + \frac{1}{2z_0} + \frac{1}{2(-z_0)} + \frac{1}{2\bar{z}_0} + \frac{1}{2(-\bar{z}_0)} \right) \\ &= 2\pi i \text{Res}_{z=0} f(z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de acordo com os cálculos abaixo para $\text{Res}_{z=0} f(z)$.

De facto $z = 0$ é um pólo de segunda ordem de $f(z)$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{e^{z^2}-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1.$$

Então

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{e^{z^2}-1} \right).$$

Calculando este limite obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{e^{z^2} - 1} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} 2 \frac{z \left(e^{z^2} - 1 \right) - z^3 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right)^2} \\
&= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} \left(z \left(e^{z^2} - 1 \right) - z^3 e^{z^2} \right)}{\frac{d}{dz} \left(\left(e^{z^2} - 1 \right)^2 \right)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1 - z^2 e^{z^2} - 2z^4 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right) z e^{z^2}} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} - 1 - z^2 e^{z^2} - 2z^4 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right) z} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} \left(e^{z^2} - 1 - z^2 e^{z^2} - 2z^4 e^{z^2} \right)}{\frac{d}{dz} \left(\left(e^{z^2} - 1 \right) z \right)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-10z^3 e^{z^2} - 4z^5 e^{z^2}}{e^{z^2} - 1 + 2z^2 e^{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-5z^3 - 2z^5}{e^{z^2} - 1 + 2z^2 e^{z^2}} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} \left(-5z^3 - 2z^5 \right)}{\frac{d}{dz} \left(e^{z^2} - 1 + 2z^2 e^{z^2} \right)} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-15z^2 - 10z^4}{6ze^{z^2} + 4z^3 e^{z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-15z - 10z^3}{6 + 4z^5} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ou, o mesmo cálculo feito de maneira mais simples,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{e^{z^2} - 1} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} 2z \frac{\left(e^{z^2} - 1 \right) - z^2 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} 2z \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(e^{z^2} - 1 \right) - z^2 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right)^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

porque

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(e^{z^2} - 1 \right) - z^2 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(e^z - 1 \right) - ze^z}{\left(e^z - 1 \right)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} \left(\left(e^z - 1 \right) - ze^z \right)}{\frac{d}{dz} \left(\left(e^z - 1 \right)^2 \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2 \left(e^z - 1 \right) e^z} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \left(e^z - 1 \right)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ou, ainda de outra forma, ainda mais simples

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{e^{z^2} - 1} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} 2 \frac{z \left(e^{z^2} - 1 \right) - z^3 e^{z^2}}{\left(e^{z^2} - 1 \right)^2} = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \left(z^2 + \frac{z^4}{2} \right) - z^3 \left(1 + z^2 \right)}{\left(z^2 + \frac{z^4}{2} \right)^2} \\
&= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{z^5}{2}}{z^4} = - \lim_{z \rightarrow 0} z = 0.
\end{aligned}$$

Ou, ainda de outra forma, não aplicando a fórmula $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{e^{z^2} - 1} \right)$:
Sabendo que temos um pólo de segunda ordem na origem, vem

$$\frac{1}{e^{z^2} - 1} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots$$

Donde

$$1 = \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots \right) (e^{z^2} - 1)$$

$$1 = \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots \right) \left(z^2 + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$$

$$1 = a_{-2} + a_{-1}z + \left(a_0 + \frac{a_{-2}}{4!} \right) z^2 + \dots$$

Concluindo-se que $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = a_{-1} = 0$.