

40.1 Problemas com mais variáveis.

Com o objectivo de exemplificar como os métodos atrás expostos se aplicam em problemas com mais variáveis, considere-se o seguinte exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\pi^2 t u \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0, y) = u(t, A, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, B) = 0 \end{array} \right. \\ u(0, x, y) = f(x, y) \end{array} \right. .$$

Onde $f(x, y)$ é uma função de classe C^1 no rectângulo $[0, A] \times [0, B]$ que satisfaz as condições fronteira. Mais à frente vamos concretizar com $A = 2$, $B = 1$ e $f(x, y) = \frac{\sin(\pi x)}{5 - 3 \cos(\pi y)}$.

Vamos então pelo método da separação de variáveis procurar soluções separadas $u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ do problema homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\pi^2 t u \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0, y) = u(t, A, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, B) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Temos $X(0) = X(A) = 0$, $Y'(0) = Y'(B) = 0$ e

$$T'XY = TX''Y + TXY'' - 2\pi^2 t TXY.$$

Dividindo esta relação por XYZ e reorganizando as parcelas, obtemos

$$\frac{T'}{T} + 2\pi^2 t = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Donde concluímos

$$\frac{T'}{T} + 2\pi^2 t = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

para alguma constante σ . Por sua vez

$$\frac{X''}{X} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y''}{Y} = \sigma - \lambda,$$

para alguma constante λ . Obtemos assim:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X & \text{com } X(0) = X(A) = 0 \\ Y'' = (\sigma - \lambda) Y & \text{com } Y'(0) = Y'(B) = 0 \\ T' = (\sigma - 2\pi^2 t) T \end{cases}.$$

O primeiro problema, que já foi resolvido anteriormente, só tem soluções não triviais se $\lambda = -\frac{m^2\pi^2}{A^2}$, para algum $m \in \mathbb{N}_1$, sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$X(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right).$$

De forma semelhante¹, obtém-se que o segundo problema só tem solução não trivial se $\sigma - \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{B^2}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ (incluindo neste caso $n = 0$), sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$Y(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right).$$

Portanto

$$\sigma = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} \right),$$

e, a menos de uma constante multiplicativa,

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{\sigma t - \pi^2 t^2} \\ &= e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} + t \right) t}. \end{aligned}$$

Fazendo combinações lineares (infinitas) destas soluções separadas $u = TXY$ obtemos

$$u(t, x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} + t \right) t} \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right).$$

Finalmente para resolver o problema proposto vamos usar a condição inicial para determinar os coeficientes $C_{m,n}$:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right).$$

Fixando o valor de y podemos ver esta igualdade como sendo a série de senos da função:

$$f_y(x) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right).$$

¹Ou notando que Y' é solução do problema anterior substituindo λ por $\sigma - \lambda$ e A por B .

Pelo que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right) &= \frac{2}{A} \int_0^A f_y(x) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx \\ &= \frac{2}{A} \int_0^A f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx.\end{aligned}$$

Por sua vez, para cada m fixo, esta última igualdade pode ser vista com a série de cossenos da função

$$F_m(y) = \frac{2}{A} \int_0^A f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right).$$

Pelo que, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}C_{m,n} &= \frac{2}{B} \int_0^B F_m(y) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right) dy \\ &= \frac{2}{B} \int_0^B \left(\frac{2}{A} \int_0^A f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx \right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right) dy,\end{aligned}$$

e para $n = 0$

$$\begin{aligned}C_{m,0} &= \frac{1}{B} \int_0^B F_m(y) dy \\ &= \frac{1}{B} \int_0^B \left(\frac{2}{A} \int_0^A f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx \right) dy.\end{aligned}$$

Obtivemos então a solução do problema proposto:

$$u(t,x,y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} + t \right)} \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right),$$

com (para $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}C_{m,n} &= \frac{2}{A} \frac{2}{B} \int_0^A \int_0^B f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{B}y\right) dx dy \\ C_{m,0} &= \frac{2}{A} \frac{1}{B} \int_0^A \int_0^B f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{A}x\right) dx dy.\end{aligned}$$

Exemplo 40.1 Vamos agora concretizar com $A = 2$, $B = 1$ e $f(x,y) = \frac{\sin(\pi x)}{5-3\cos(\pi y)}$. Vem então a solução do problema proposto:

$$u(t,x,y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{m,n} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{4} + n^2 + t \right)} \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) \cos(n\pi y),$$

com (para $n \neq 0$)

$$C_{m,n} = 2 \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{\sin(\pi x)}{5 - 3 \cos(\pi y)} dx \right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) \cos(n\pi y) dx dy$$

$$C_{m,0} = \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{\sin(\pi x)}{5 - 3 \cos(\pi y)} dx \right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) dx dy,$$

ou seja (para $n \neq 0$)

$$C_{m,n} = 2 \int_0^2 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) dx \int_0^1 \frac{\cos(n\pi y)}{5 - 3 \cos(\pi y)} dy$$

Temos agora os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\cos\left(\left(1 - \frac{m}{2}\right)\pi x\right) - \cos\left(\left(1 + \frac{m}{2}\right)\pi x\right) \right) dx \\ &= \delta_{m,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \frac{\cos(n\pi y)}{5 - 3 \cos(\pi y)} dy &= \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\pi y)}{5 - 3 \cos(\pi y)} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{e^{in\pi y}}{5 - 3 \cos(\pi y)} dy \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{i\pi (e^{i\pi y})^n}{5 - 3 \cos(\pi y)} dy \\ &= \frac{1}{i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{5 - 3 \frac{z+z^{-1}}{2}} dz \\ &= \frac{2i}{3\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} dz \\ &= \frac{2i}{3\pi} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{3}} \frac{z^n}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} \\ &= \frac{-4}{3} \frac{3^{-n}}{(\frac{1}{3} - 3)} = \frac{3^{-n}}{2} \end{aligned}$$

Pelo que

$$C_{m,n} = \frac{3^{-n}}{2} \delta_{m,2}$$

$$C_{m,0} = \frac{1}{4} \delta_{m,2}$$

Portanto a solução fica

$$u(t, x, y) = \left(\frac{1}{4} e^{-\pi^2(1+t)t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n}}{2} e^{-\pi^2(1+n^2+t)t} \cos(n\pi y) \right) \sin(\pi x),$$