# 38 ª Aula 2006.05.31 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 38.1 Equação das ondas-Modos de vibração

Vimos na última aula que a solução do problema

$$\begin{cases} \textbf{Equação das ondas} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{array}{l}\textbf{Condições fronteira} \\ \text{(de Dirichlet)}\end{array} & \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,L) = 0 \end{cases} \\ \textbf{Condições iniciais} & \begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{com} \quad x \in [0,L], \end{cases} \tag{38.1}$$

tem a solução formal

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{38.2}$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad \text{e} \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

Para simplificar a interpretação desta solução vamos supor $v_0 \equiv 0$, ou seja $B_n = 0$ para todo $n$ (esta simplificação não altera significativamente a interpretação que se segue; é sobretudo a uma simplificação na notação[1]). Temos então

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Para cada $t$ fixo, esta expressão é a série de senos da função $u(t,x)$, sendo os seus coeficientes dados por $A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$.Vemos então que a evolução temporal de $u(t,x)$ é consubstanciada

[1] No caso geral, escrevendo o ponto $(A_n, B_n)$ em coordenados polares $(A_n, B_n) = \alpha_n (\cos\theta_n, \operatorname{sen}\theta_n)$, com $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ e $\theta_n = \arg(A_n + iB_n)$, temos

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \left( \cos\theta_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + \operatorname{sen}\theta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t - \theta_n\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \end{aligned}$$

na oscilação periódica dos coeficientes da expansão espacial em série de senos. Cada um dos termos da série que define $u\left(t,x\right)$,

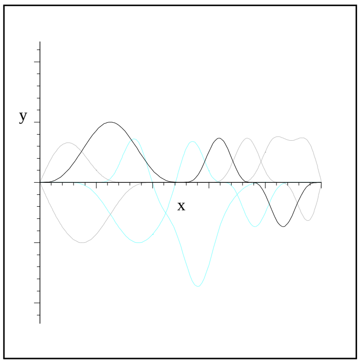
$$A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

é designado por harmónico (para $n = 1$ designa-se harmónico fundamental e para $n > 1$ temos os harmónicos supertónicos). O comprimento de onda de cada harmónico é o dobro da distância espacial entre dois zeros e é dado por $\dfrac{2L}{n}$. Cada um destes harmónicos vibra com uma frequência (temporal) dada por $\dfrac{nc}{2L}$; o comprimento de onda (espacial) é portanto inversamente proporcional à frequência temporal).

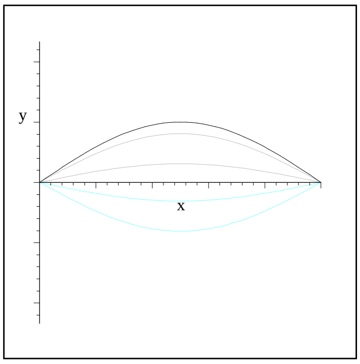
Graficamente temos:

$$u\left(t,x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-n^2 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{ou seja:}$$

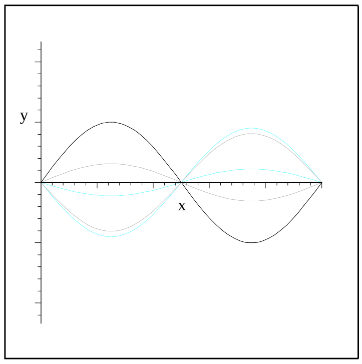
$$\begin{aligned} u\left(t,x\right) = {} & A_1 \cos\left(\tfrac{\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{L}x\right) + A_2 \cos\left(\tfrac{2\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right) + \\ & + A_3 \cos\left(\tfrac{3\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{3\pi}{L}x\right) + A_4 \cos\left(\tfrac{4\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{4\pi}{L}x\right) + A_5 \cos\left(\tfrac{5\pi c}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{L}x\right) + \cdots \end{aligned}$$




$= b_1$

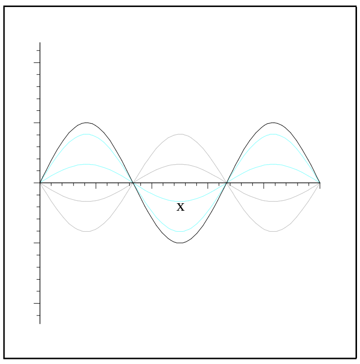



$+ b_2$

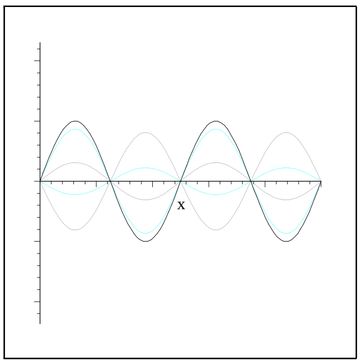



$+$

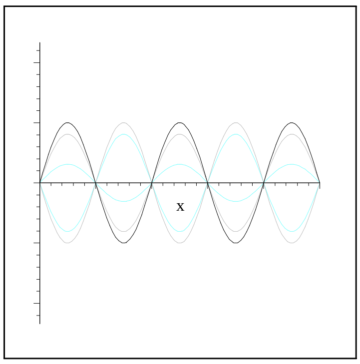
$+b_3$




$+b_4$




$+b_5$




$+\cdots$

Embora já tenhamos resolvido o problema (38.1) e interpretado a sua solução como a sobreposição de vibrações harmónicas, é útil introduzir uma resolução alternativa que nos levará a uma diferente interpretação das (mesmas) soluções da equação das ondas. Antes de abordarmos esta resolução alternativa devida a d'Alembert, vamos efectuar alguns cálculos com a solução (38.2) já obtida, que nos permitirão por um lado motivar a anunciada diferente resolução, e por outro, mostrar que as soluções obtidas pelos dois processos são idênticas. De facto temos usando igualdades trigonométricas bem conhecidas temos

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n}{2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{B_n}{2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)\right)\right]\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)-\frac{B_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)\right]+\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)+\frac{B_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)\right]\\
&= p(x+ct)+q(x-ct),
\end{aligned}$$

com $p(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right)-\frac{B_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right)\right]$ e $q(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{A_n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right)+\frac{B_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\tau\right)\right]$.

## 38.2 Equação das ondas-solução de d'Alembert

Comecemos por ver que a forma que obtivemos acima é suficiente para garantirmos que se trata de uma solução da equação das ondas.

**Proposição 38.1** *Se $p$ e $q$ são duas funções reais de classe $C^2$ então a função definida por*

$$u(t,x)=p(x+ct)+q(x-ct),$$

*é solução da equação* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

**Demonstração.** Com $u(t,x)=p(x+ct)+q(x-ct)$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}=cp'(x+ct)-cq'(x-ct) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2p''(x+ct)+c^2q''(x-ct).$$

Do mesmo modo temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p'(x+ct)+q'(x-ct) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=p''(x+ct)+q''(x-ct),$$

pelo que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. ■

Mas o recíproco também é verdadeiro como se mostra a seguir.

**Proposição 38.2** *Se $u$ é de classe $C^2$ e se $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, então existem funções $p$ e $q$ tais que*

$$u(t,x) = p(x+ct) + q(x-ct).$$

**Demonstração.** Considere-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\alpha = x + ct \quad \text{e} \quad \beta = x - ct.$$

E seja $U(\alpha,\beta) = u\left(\frac{\alpha-\beta}{2c}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = c\frac{\partial U}{\partial \alpha} - c\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

e usando o Teorema de Schwarz ( $u \in C^2 \Rightarrow U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha}\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) - c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) \\
&= c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right).
\end{aligned}$$

De igual modo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}.$$

Então $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ escreve-se

$$c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}\right),$$

donde se obtém

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\beta\partial\alpha} = 0.$$

Integrando esta última equação em relação a $\beta$ vem

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = r(\alpha),$$

onde $r(\alpha)$ é uma função arbitrária de classe $C^1$. Integrando agora em ordem a $\alpha$ obtemos

$$U = p(\alpha) + q(\beta),$$

onde $p(\alpha)$ é uma primitiva de $r(\alpha)$ (portanto é uma função arbitrária de classe $C^2$) e $q(\beta)$ é uma função arbitrária de classe[2] $C^2$. ∎

[2] A conclusão de $p$ e $q$ serem de classe $C^2$ advém do facto de sabermos *a priori* que $u$ (e portanto $U$) é de classe $C^2$.

De acordo com estes resultados a solução do problema (38.1) escreve-se

$$u(t,x) = p(x+ct) + q(x-ct).$$

Vamos agora determinar as funções $p$ e $q$ de forma a que $u$ satisfaça as condições iniciais e fronteira de (38.1).

Comecemos por impor as condições iniciais (supondo $u_0(x)$ e $v_0(x)$ são suficientemente regulares[3])

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = u_0(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{com} \quad x \in [0, L].$$

integrando a segunda equação obtemos

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = u_0(x) \\ p(x) - q(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x v_0(s)\, ds + K \end{cases} \quad \text{com} \quad x \in [0, L]$$

donde(para $x \in [0, L]$)

$$p(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)\, ds + \frac{K}{2}$$

e

$$q(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x v_0(s)\, ds - \frac{K}{2},$$

onde $K$ é uma constante arbitrária e irrelevante pois $u(t,x) = p(x+ct) + q(x-ct)$ não depende desta constante. Tomemos pois $K = 0$.

Note-se que apenas ficamos a conhecer as funções $p$ e $q$ no intervalo $[0, L]$ e que para construirmos a função $u$ necessitamos de conhecer as estas funções em toda a recta real. Vamos então impor as condições fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = p(ct) + q(-ct) = 0 \\ u(t,L) = p(L+ct) + q(L-ct) = 0 \end{cases}.$$

[3]Basta por exemplo que $u_0$ seja de classe $C^2$, $v_0$ seja de classe $C^1$ e tais que

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = 0,$$

(ou seja $u_0$, $v_0$ e $u_0''$ têm também de satisfazer as condições fronteira). No entanto condições menos restritivas são possíveis se generalizarmos o conceito de solução. De facto podemos considerar a expressão (38.3) como uma solução generalizada do problema (38.1) quando pedimos apenas que $v_0$ seja integrável, sendo a função $u_0$ arbitrária tal que $u_0(0) = u_0(L) = 0$.

Uma vez que $t$ é um número real qualquer, podemos tomar $\tau = ct$ como um número arbitrário de $\mathbb{R}$ e escrever

$$\begin{cases} p(\tau) = -q(-\tau) \\ \\ p(L+\tau) = -q(L-\tau) \end{cases}.$$

Donde

$$\begin{aligned} p(\tau + 2L) &= p(L+\tau+L) \\ &= -q(L-(L+\tau)) \\ &= -q(-\tau) \\ &= p(\tau), \end{aligned}$$

ou seja $p$ é uma função periódica de período $2L$. Como $q(\tau) = -p(-\tau)$, a função $q$ também é periódica de período $2L$.

Portanto a solução do problema (38.1) é dada pelas seguintes expressões

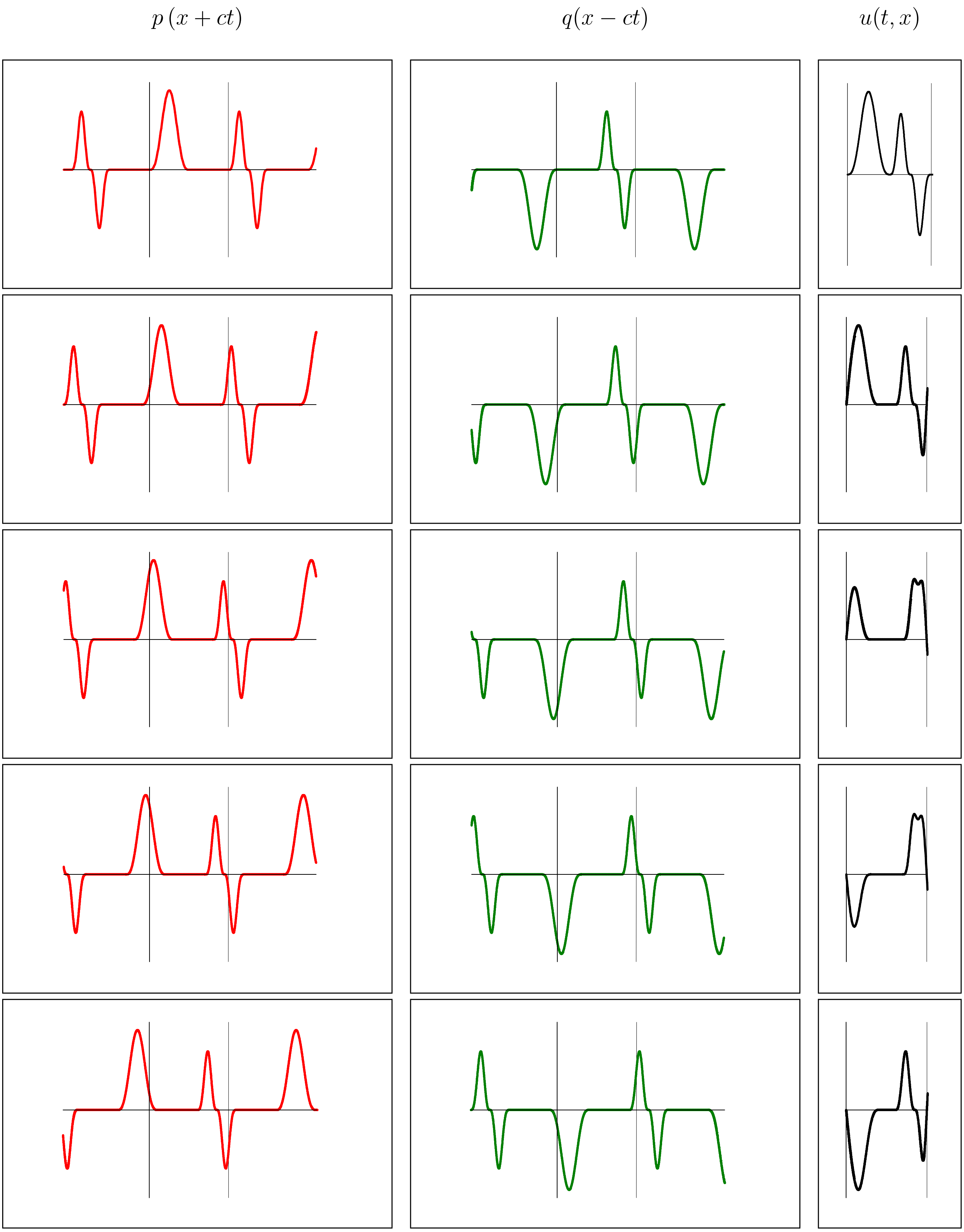
$$\begin{cases} u(t,x) = p(x+ct) + q(x-ct) \\ \\ p(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x v_0(s)\,ds \quad \text{se} \quad x \in [0,L] \\ \\ q(x) = \dfrac{1}{2}u_0(x) - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x v_0(s)\,ds \quad \text{se} \quad x \in [0,L] \\ \\ p(\tau) = -q(-\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ \\ p(\tau) = p(\tau + 2L) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{38.3}$$

Esta solução deve ser interpretada como a sobreposição de uma onda que se desloca para a esquerda (consubstanciada na parcela $p(x+ct)$ no caso $c > 0$) com uma onda que se desloca para a direita (consubstanciada na parcela $q(x-ct)$ no caso $c > 0$), ambas com uma velocidade de propagação expressa pelo número $c$. Ao chocar com os pontos de fronteira ( $x = 0$ e $x = L$) a onda sobreposta $u$ reflete-se com inversão de sinal. De facto a parte de $u$ que sai do intervalo $[0,L]$ através da função $q$ entra pelo mesmo ponto fronteira ($x = L$ no caso $c > 0$) através da função $p$ com sinal contrário; reciprocamente o que sai na função $p$ entra pelo mesmo ponto fronteira ($x = 0$ no caso $c > 0$) na função $q$ com sinal oposto.

Na seguinte figura representa-se evolução temporal das funções

$$p(x+ct), \quad q(x-ct) \quad \text{e} \quad u(t,x) = p(x+ct) + q(x-ct),$$

cada linha representando um pequeno acréscimo temporal em relação à linha anterior:



$p(x+ct)$
$q(x-ct)$
$u(t,x)$

## 38.3 Exemplo

Considere-se a seguinte concretização de problema (38.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,\pi) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u(0,x) = \operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \text{com} \quad x \in [0,\pi]\,. \end{cases}$$

De acordo com a solução (38.2) temos

$$u(t,x) = \cos(ct)\operatorname{sen}(x)\,.$$

De acordo com a solução (38.3) temos

$$p(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) = q(x)\,,$$

primeiramente para $x \in [0,\pi]$ e em consequência, pelas relações $p(\tau) = -q(-\tau)$ e $p(\tau) = p(\tau + 2\pi)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+ct) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x-ct)\,.$$

Não se trata de soluções diferentes, mas da mesma solução vista sob perspectivas alternativas. De facto usando igualdades trigonométricas bem conhecidas concluímos

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+ct) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x-ct) = \cos(ct)\operatorname{sen}(x)\,.$$