

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

### 37.1 Equação do Calor não homogénea

Considere-se o problema do calor numa barra de comprimento  $L$  e com constante de difusão térmica  $k$ , em que é dada uma distribuição inicial de temperatura  $f(x)$  e as extremidades da barra são mantidas às temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = T_1 \\ u(t, L) = T_2 \end{array} \right. \\ u(0, x) = f(x) \end{array} \right.$$

Já resolvemos este problema no caso  $T_1 = T_2 = 0$ . Se tentarmos seguir a mesma estratégia de resolução deparamo-nos com uma dificuldade: apesar de ser possível determinar soluções separadas do problema sem a condição inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = T_1 \\ u(t, L) = T_2 \end{array} \right. \end{array} \right.,$$

este último problema não é homogéneo; combinações lineares de soluções não são soluções. Pelo que não é útil determinar muitas soluções deste problema. Em vez disso vamos determinar apenas uma solução  $u_0$ , i.e. uma função (simples) que satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_0(t, 0) = T_1 \\ u_0(t, L) = T_2 \end{array} \right. \end{array} \right..$$

Uma vez determinado  $u_0$  vamos procurar a função  $w = u - u_0$ . Esta função deve ser tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, L) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = f(x) - u_0(0, x) \end{array} \right.,$$

uma vez que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= u(t, 0) - u_0(t, 0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(t, 1) &= u(t, 1) - u_0(t, 1) = T_2 - T_2 = 0, \\ w(0, x) &= u(0, x) - u_0(0, x) = f(x) - u_0(0, x). \end{aligned}$$

Portanto  $w$  satisfaz uma equação que já sabemos resolver. Uma vez determinada a função  $w$ , obtemos a função pretendida é  $u = u_0 + w$ .

Do ponto de vista matemático qualquer função  $u_0$  nas condições indicadas servirá para resolver o problema, pelo que a escolha deverá obedecer a um critério de simplicidade. Do ponto de vista físico será interessante escolher uma função  $u_0$  nas condições indicadas que tenha um significado físico relevante.

No presente caso, determinar (se possível)  $u_0$  independente da variável  $t$  será uma boa escolha uma vez que terá a interpretação física óbvia de **solução de equilíbrio** do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} u_0(t, 0) = T_1 \\ u_0(t, L) = T_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

A função  $w$  terá então a interpretação da diferença de temperatura em relação ao equilíbrio quando distribuição inicial de temperatura é  $f(x)$ .

Portanto, impondo  $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$  (solução de equilíbrio), obtemos  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0$  e primitivando duas vezes vem  $u_0(x) = A + Bx$ . Finalmente as condições fronteira impõem

$$u_0(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x,$$

que é, portanto, a solução de equilíbrio procurada. Por outro lado a função  $w$  foi determinada em (33.1) e é

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

onde os coeficientes  $b_n$  são determinados por

$$f(x) - u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right).$$

Atendendo à forma de  $u_0$  e ao nosso conhecimento sobre séries de senos concluímos que a solução procurada é (pelo menos no caso de  $f$  ser contínua e seccionalmente monótona)

$$u(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

onde os coeficientes  $b_n$  são determinados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left( f(x) - \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx.$$

O método utilizado na resolução deste problema é facilmente generalizável para resolver outros problemas não homogéneos como aqueles se indicam nos seguintes exemplos.

**Exemplo 37.1** Considere-se o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x) \\ \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ u(0, x) = \sin(\pi x) \end{array} \right.$$

(Uma barra, com as extremidades sempre a 0 graus, é aquecida na parte central.)

Vamos procurar uma solução  $u_0$  de equilíbrio (i.e. tal que  $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$ ) do problema sem a condição inicial. Obtemos

$$u_0''(x) = -\sin(\pi x) \quad \text{com} \quad u_0(0) = u_0(1) = 0,$$

onde

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x).$$

Vamos agora determinar  $w = u - u_0$ . Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} w(t, 0) = 0 \\ w(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x) \end{array} \right.$$

Donde

$$w(t, x) = e^{-\pi^2 t} \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x)$$

e

$$u(t, x) = \left(e^{-\pi^2 t} \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x).$$

**Exemplo 37.2** Considere-se o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ u(0, x) = \cos(\pi x) \end{array} \right.$$

(Uma barra isolada é aquecida e arrefecida periodicamente e uniformemente segundo uma lei sinusoidal.)

Vamos procurar uma solução  $u_0$  que não dependa da variável  $x$  (i.e. uma solução uniforme) do problema. Obtemos

$$u'_0(t) = \operatorname{sen} t,$$

onde podemos tomar

$$u_0(t) = -\cos t.$$

Vamos agora determinar  $w = u - u_0$ . Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(t, 1) = 0 \end{array} \right. \\ w(0, x) = \cos(\pi x) + 1 \end{array} \right..$$

Donde

$$w(t, x) = e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 1$$

e

$$u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 1 - \operatorname{sen} t.$$

## 37.2 Comportamento qualitativo das soluções da Eq. do Calor

Vamos agora analisar as soluções da equações de calor que determinamos. Considere-se por exemplo a solução (33.1) do problema (P1) da 33<sup>a</sup> aula. Comecemos por notar que a solução

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

tende para a solução de equilíbrio (neste caso, uma solução de temperatura constante igual a zero). Ou seja

$$\forall x \in [0, L] \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0.$$

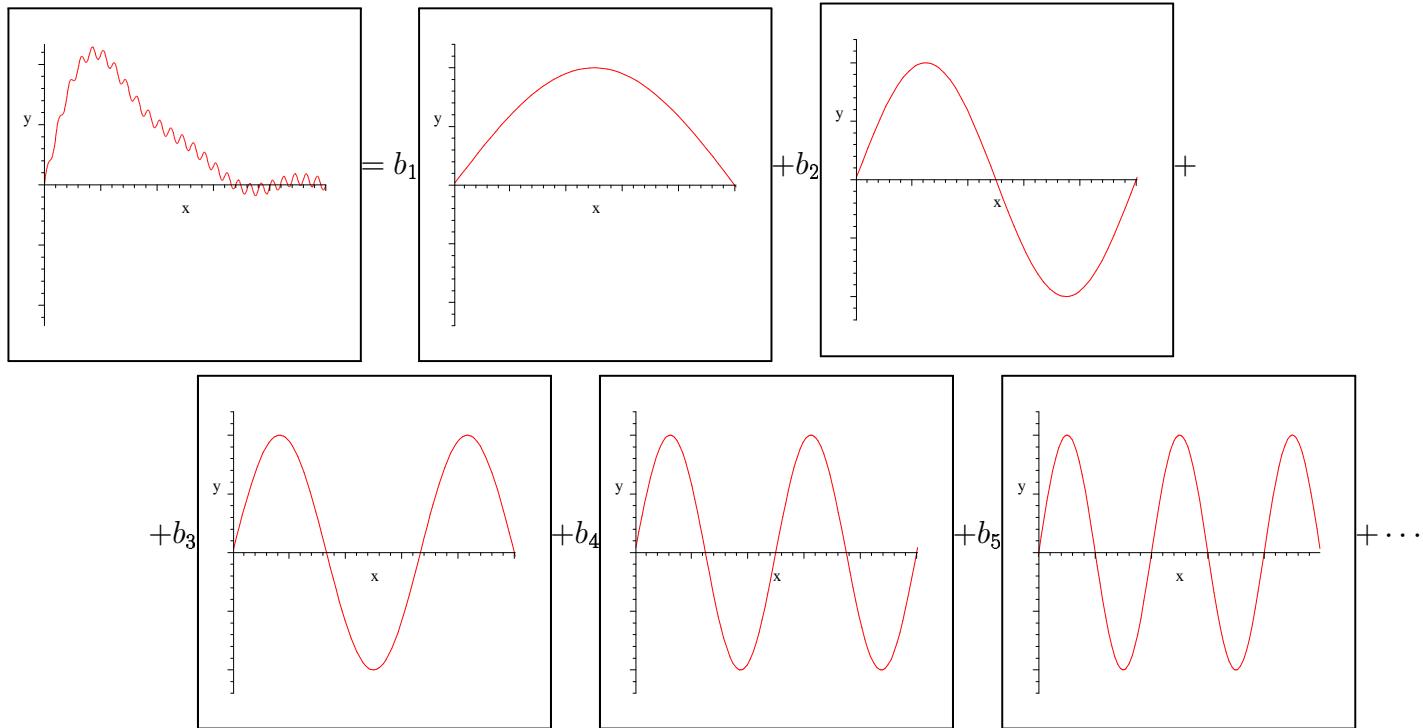
Por outro lado pode-se mostrar que, mesmo no caso em que para  $t = 0$  a função  $u(0, x)$  não seja muito regular (por exemplo contínua e seccionalmente monótona mas não diferenciável),  $u(t, x)$  é de classe  $C^\infty$  para qualquer  $t > 0$  (por mais pequeno que seja  $t$ ).

Este mesmo fenômeno de regularização, operado pela evolução difusiva governada pela equação do calor, é aparente na forma da solução  $u(t, x)$ : atendendo a que  $e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2} t}$  decresce exponencialmente com  $t$  e com  $n$ , passado pouco tempo (i.e. mesmo para pequenos valores de  $t$ ) a solução é bem aproximada por uma soma finita de funções de pequena variação, e.g.

$$u(t, x) \approx b_1 e^{-\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) + b_2 e^{-4\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

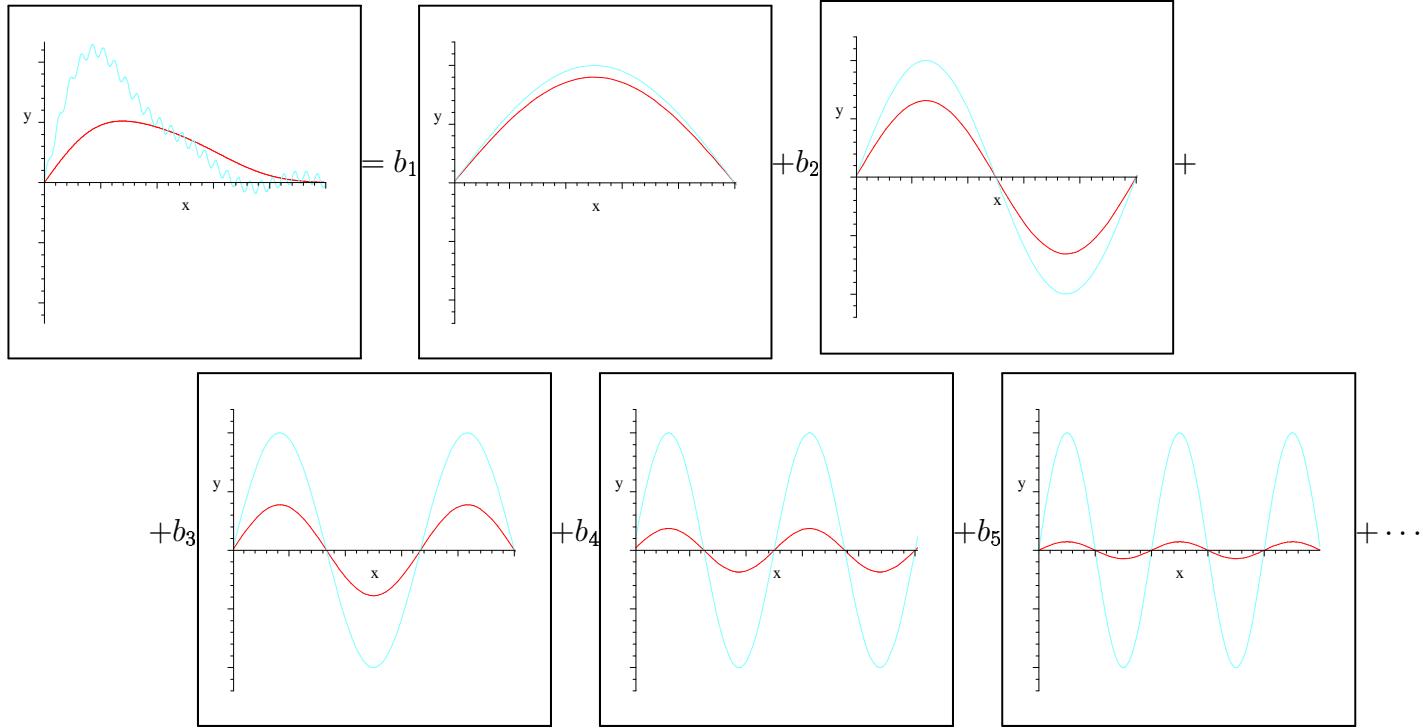
Graficamente temos para  $t = 0$ :  $u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  ou seja:

$$u(0, x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + b_4 \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) + b_5 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \dots$$



E para  $t \neq 0$ :  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 \frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  ou seja:

$$u(t, x) = b_1 e^{-\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + b_2 e^{-4\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + b_3 e^{-9\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + b_4 e^{-16\frac{\pi^2 k}{L^2} t} \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) + \dots$$



### 37.3 Equação das ondas-separação de variáveis

Problemas de vibração elástica podem, em certos casos, ser bem modulados pela equação das ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{lap} u$$

Tal como fizemos para a equação do calor vamos considerar também aqui o caso unidimensional, apenas por simplicidade de exposição, pois todos os métodos indicados são facilmente generalizáveis a dimensões superiores.

Vamos então concentrar-nos no seguinte problema, que correspondente ao estudo das vibrações transversais de uma corda perfeitamente elástica de comprimento  $L$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equação das ondas} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \text{Condições fronteira} \\ (\text{de Dirichlet}) & \left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{array} \right. \\ \text{Condições iniciais} & \left\{ \begin{array}{ll} u(0, x) = u_0(x) & \text{com } x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) & \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (37.1)$$

A solução  $u(t, x)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in [0, L]$ , representa o deslocamento  $u$  em relação ao equilíbrio no instante  $t$  e em cada ponto  $x$  da corda elástica cujo comprimento em repouso é  $L$ . A constante positiva  $c$  depende da densidade desta corda ideal e da tensão a que está sujeita. As condições fronteira indicam que as extremidades da corda estão fixas. As condições iniciais fixam a posição e a velocidade transversal da corda no instante inicial. (Note-se que se têm duas condições iniciais e que a equação é de segunda ordem em  $t$ .)

Aplicando o método da separação de variáveis, vamos determinar funções da forma  $u(t, x) = T(t)X(x)$  soluções do problema linear homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = 0 \text{ e } u(t, L) = 0 \end{array} \right. . \quad (37.2)$$

Temos

$$T''X = c^2TX'' \quad \text{e} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Portanto  $\lambda = \frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X}$  tem de ser constante, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' = \lambda X \quad \text{com} \quad X(0) = X(L) = 0 \\ T'' = \lambda c^2 T \end{array} \right. .$$

O primeiro problema já resolvemos anteriormente e só tem soluções não triviais quando

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{com } n \in \mathbb{N}_1,$$

sendo as soluções dadas, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Temos agora, para cada  $n \in \mathbb{N}_1$ ,

$$T'' = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T.$$

Resolvendo esta equação homogénea de 2<sup>a</sup> ordem obtemos

$$T(t) = A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right),$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias. As soluções  $T(t) X(x)$  que acabamos de obter,

$$\left(A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

podem ser somadas para obter uma solução geral (formal) do problema (37.2). Vamos agora determinar os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  de modo a que

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

seja solução de (37.1).

Usando a primeira condição inicial vem

$$u_0(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Reconhecemos a série de senos da função  $u_0(x)$  e portanto

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Derivando formalmente  $u(t, x)$  em ordem a  $t$  obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-n\pi c}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{n\pi c}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

pelo que a segunda condição inicial fica

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Também aqui reconhecemos uma série de senos, agora da função  $v_0(x)$ , e portanto

$$\frac{n\pi c}{L} B_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

ou seja

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$