**36 ª Aula 2006.05.26 AMIV LEC Apontamentos**

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 36.1 Série de Fourier na forma de exponenciais complexas

Seja $f$ definida em $[0,2\pi]$, para simplificar notação, integrável neste intervalo, e a sua série de Fourier

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right),$$

com $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ e $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$.

Utilizando as fórmulas de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned}
SF_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}
\end{aligned}$$

com[1]

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{se } n \geqslant 1 \\ \frac{a_0}{2} & \text{se } n = 0 \\ \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2} & \text{se } n \leqslant -1 \end{cases}, \tag{36.1}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
c_n &= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{\cos(nx) - i\operatorname{sen}(nx)}{2}dx & \text{se } n \geqslant 1 \\[2ex] \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right) & \text{se } n = 0 \\[2ex] \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{\cos(-nx)+i\operatorname{sen}(-nx)}{2}dx & \text{se } n \leqslant -1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\cos(nx) - i\operatorname{sen}(nx)\right)dx & \text{se } n \geqslant 1 \\[2ex] \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx & \text{se } n = 0 \\[2ex] \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\cos(nx) - i\operatorname{sen}(nx)\right)dx & \text{se } n \leqslant -1 \end{cases}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

[1] Ou seja, para $n \geqslant 0$,

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{e} \quad b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right).$$

Resumindo na forma de exponenciais complexas a série de Fourier de uma função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ escreve-se

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

## 36.2 Convergência em média quadrática

A série de Fourier de uma função $f$ integrável em $[0, 2\pi]$, pode-se escrever na forma

$$SF_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n(x),$$

onde as funções $\varphi_n(x)$ são definidas por

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

e os coeficientes por

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f\, \overline{\varphi_n}\, dx,$$

onde $\overline{\varphi_n}$ designa o complexo conjugado da função $\varphi_n$ (portanto $\overline{\varphi_n} = \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}$). Estas funções $\varphi_n$ satisfazem a seguinte relação[2]

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \varphi_m \overline{\varphi_n}\, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \begin{cases} \frac{e^{i(m-n)2\pi}-1}{2\pi i(m-n)} & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx & \text{se } m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases} \\
&= \delta_{m,n}\,.
\end{aligned}$$

Então se definirmos o produto interno (num espaço adequado)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f\, \overline{g}\, dx,$$

temos

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{m,n},$$

[2] O símbolo $\delta_{m,n}$ é designado por delta de Kronecker e é definido por:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}.$$

ou seja podemos interpretar o conjunto das funções $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como uma base ortonormada de um certo espaço. Por outro lado com esta notação vem

$$\alpha_n = \langle f, \varphi_n \rangle ,$$

que pode ser interpretado como a projecção de $f$ na direcção $\varphi_n$, e portanto

$$SF_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, \tag{36.2}$$

será a projecção no espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este espaço será um subespaço dum espaço designado $L^2([0,2\pi])$ a que está associada a norma

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \sqrt{\langle f, f \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2 \, dx}. \end{aligned}$$

Neste espaço constituído de funções de quadrado integrável, devemos então considerar

$$f = g \quad \text{sse} \quad \|f - g\|_{L^2} = 0.$$

Ou seja devemos identificar funções difiram apenas num conjunto de medida nula. Do mesmo modo devemos considerar que uma sequência de funções $f_n \in L^2([0,2\pi])$ converge para $f \in L^2([0,2\pi])$ sse

$$\lim_n \|f_n - f\|_{L^2} = 0,$$

ou seja sse

$$\lim_n \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 \, dx = 0.$$

Esta convergência é designada por **convergência em média quadrática**. Portanto é neste sentido que deve ser considerada a convergência da série (36.2). Pode-se mostrar que o espaço gerado pela base $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de facto todo o espaço $L^2([0,2\pi])$. Ou seja para qualquer $f \in L^2([0,2\pi])$ tem-se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

É este resultado que é enunciado no seguinte Teorema.

**Teorema 36.1** *Dado $f \in L^2([0,2\pi])$, defina-se*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad e \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

*Então*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

## 36.3 Identidade de Parseval

A identidade de Parseval não é mais do que a relação bem conhecida da álgebra linear[3]:

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 .$$

Traduzindo no presente contexto,

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

No caso de $f$ ser uma função com valores reais é mais natural escrever a série de Fourier na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right),$$

e portanto, é útil estabelecer a identidade de Parseval em termos deste coeficientes $a_n$ e $b_n$, usando as relações (36.1):

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f|^2 \, dx &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\
&= 2\pi \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \right) \\
&= 2\pi \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_{-n}^2 + b_{-n}^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) + a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \right),
\end{aligned}$$

obtendo-se **identidade de Parseval**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 \, dx.$$

---

[3] Recorde-se a dedução formal:

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n, \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m\rangle \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle \langle f, \varphi_m\rangle \varphi_m, \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m\rangle \langle \varphi_m, \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m\rangle \overline{\langle f, \varphi_n\rangle} \langle \varphi_m, \varphi_n\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_m\rangle \overline{\langle f, \varphi_n\rangle} \delta_{m,n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \overline{\langle f, \varphi_n\rangle} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 .
\end{aligned}$$

## 36.4 Regularidade e estimativas sobre os coeficientes

Vamos agora justificar rigorosamente a seguinte afirmação imprecisa: uma função é tanto mais regular quanto mais depressa os coeficientes de Fourier convergirem para 0, e vice-versa.

**Proposição 36.2** *Se $f$ é periódica e de classe $C^k$, então os seus coeficientes de Fourier $a_n$ e $b_n$ são tais que $n^k |a_n|$ e $n^k |b_n|$ são sucessões limitadas.*

**Demonstração.** Para simplificação de notação vamos considerar $f$ de período $2\pi$.

Vamos começar por provar por indução em $j$, que para todo $n \in \mathbb{N}_1$, se $0 \leqslant j \leqslant k$ então

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{\pi n^j} \left( \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx)\, dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| \right) \tag{36.3}$$

Esta afirmação é obviamente verdadeira para $j = 0$ (por definição dos coeficientes). Por outro, usando integração por partes e atendendo a que todas as derivadas de $f$ têm período $2\pi$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx)\, dx \right| &= \left| \left[ f^{(j)}(x) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| \end{aligned}$$

e do mesmo modo

$$\left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx)\, dx \right|.$$

Então usando a hipótese de indução vem

$$\begin{aligned} |a_n| + |b_n| &= \frac{1}{\pi n^j} \left( \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \cos(nx)\, dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^j} \left( \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| + \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx)\, dx \right| \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^{j+1}} \left( \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \cos(nx)\, dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} f^{(j+1)}(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \right| \right). \end{aligned}$$

Uma vez demonstrada a relação (36.3) obtemos

$$\begin{aligned} |a_n| + |b_n| &\leqslant \frac{1}{\pi n^k} \int_0^{2\pi} \left| f^{(k)}(x) \right| \left( |\cos(nx)| + |\operatorname{sen}(nx)| \right) dx \\ &\leqslant \frac{4}{n^k} \max_x \left| f^{(k)}(x) \right|, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar ■

**Proposição 36.3** *Se para certo $k \in \mathbb{N}$ as sequências $a_n$ e $b_n$ satisfazem a condição:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) \quad \textit{é convergente,}$$

*então a série de Fourier com coeficientes $a_n$ e $b_n$ define uma função de classe $C^k$.*

**Demonstração.** Temos, para qualquer natural $j \leqslant k$,

$$\begin{aligned} \left|n^j a_n \cos(nx)\right| + \left|n^j b_n \operatorname{sen}(nx)\right| &\leqslant n^j \left(|a_n| + |b_n|\right) \\ &\leqslant n^k \left(|a_n| + |b_n|\right).,\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a hipótese sobre os coeficientes $a_n$ e $b_n$, concluímos pelo critério de Weierstrass que as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nx) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^j b_n \operatorname{sen}(nx)$$

são uniformemente convergentes em $\mathbb{R}$ para $j \leqslant k$. Então (para $1 \leqslant j \leqslant k$)

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nt)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \int_0^x \cos(nt)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \operatorname{sen}(nx),$$

pelo que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \cos(nt).$$

De forma semelhante (fazendo agora a integração entre $\frac{\pi}{2}$ e $x$) obtemos

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{j-1} a_n \cos(nx) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^j a_n \operatorname{sen}(nt).$$

Usando iterativamente estas relações concluímos que a função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

é $k$ vezes diferenciável e a sua derivada de ordem $k$ é dada pela soma

$$s_c \sum_{n=1}^{+\infty} n^k a_n \cos(nx) + s_s \sum_{n=1}^{+\infty} n^k b_n \operatorname{sen}(nx),$$

onde $s_c, s_s \in \{-1, 1\}$. Como vimos acima estas são séries uniformemente convergentes de funções contínuas, pelo que $f^{(k)}(x)$ é uma função contínua. ■

Como corolário fácil das duas últimas proposições temos a seguinte afirmação: Se $f$ é de classe $C^k$, então os seus coeficientes de Fourier satisfazem, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\lim n^{k-\epsilon} a_n = \lim n^{k-\epsilon} a_n = 0;$$

reciprocamente se $a_n$ e $b_n$ satisfazem, para algum $\epsilon > 0$,

$$\lim n^{k+1+\epsilon} a_n = \lim n^{k+1+\epsilon} a_n = 0,$$

então a série de Fourier que definem é de classe $C^k$.