# 34 ª Aula 2006.05.22 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 34.1 Séries de Fourier - Cálculo dos coeficientes

Seja $f$ definida em $[0, L]$ tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right)$$

Se supusermos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|)$ é convergente, então a série trigonométrica acima é uniformemente convergente, pelo que se podem fazer os seguintes cálculos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx + b_n \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) dx + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx + b_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx \right)
\end{aligned}$$

utilizando os seguinte resultados, para $n, m \in \mathbb{N}_1$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{se } m = n \end{cases} \\
\textstyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx &= 0 \\
\textstyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{se } m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

Obtemos

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

e

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx.$$

## 34.2 Séries de Fourier - Definição formal

Seja $f$ definida em $[0, L]$, integrável neste intervalo, e defina-se para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx$$

e com estes coeficientes considere-se a série

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \right)$$

designada por **série de Fourier** de $f$.

Já sabemos se $f$ for definida por uma série deste tipo com coeficientes absolutamente somáveis então $SF_f(x) = f(x)$. A questão que surge é: em que condições (dada uma função $f$ qualquer) se tem $SF_f(x) = f(x)$?

Note-se que o domínio desta série de Fourier estende-se naturalmente a toda a recta real, i. e. em caso de convergência podemos dizer que $SF_f$ está definida em $\mathbb{R}$ e é periódica de período $L$; i. e.[1]

$$SF_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad SF_f(x + L) = SF_f(x)$$

Pelo que devemos considerar as séries de funções periódicas $f$ ou de prolongamentos periódicos de funções definidas em intervalos (como o caso que consideramos acima) quando pomos a questão: $SF_f(x) = f(x)$?

Então, se partirmos de uma função $f$ definida no intervalo $[-\ell, \ell]$, fazendo um prolongamento periódico de período $L = 2\ell$ obtemos

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx$$

atendendo a que o integral de uma função periódica ao longo de um período é independente do ponto inicial; e assim obtemos a série de Fourier

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

[1] Podemos também considerar

$$SF_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad SF_f(x + L) = SF_f(x)$$

se $f$ tiver valor complexos (mas variável real).

## 34.3 Série de Fourier - Teoremas de convergência pontual

### 34.3.1 Funções seccionalmente monótonas

Pode-se mostrar o seguinte Teorema

**Teorema 34.1** *Seja $f$ definida em $\mathbb{R}$, limitada, e tal que $f(x+L) = f(x)$. Se $f$ é e seccionalmente monótona então*[2]

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad SF_f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right)$$

Note-se que, se para além das condições anteriores, $f$ for contínua no ponto $x$, temos

$$SF_f(x) = f(x).$$

Uma função periódica de período $L$ diz-se seccionalmente monótona se for possível subdividir um intervalo de comprimento $L$ num número finito de subintervalos, no interior dos quais a função é monótona.

### 34.3.2 Funções seccionalmente $C^1$

É mais frequente encontrar na literatura o seguinte teorema igualmente útil e independente do anterior (existem funções que satisfazem as condições do primeiro mas não satisfazem as do segundo teorema e vice-versa).

**Teorema 34.2** *Se $f$ definida em $\mathbb{R}$ é tal que $f(x+L) = f(x)$ e se é seccionalmente $C^1$ então*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad SF_f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right)$$

Uma função periódica de período $L$ diz-se seccionalmente $C^1$ se for possível subdividir um intervalo de comprimento $L$ num número finito de subintervalos onde a função é $C^1$ existindo (com valores finitos) os limites laterais da derivada em cada um dos extremos destes subintervalos.

Por exemplo a função $f$ que é o prolongamento periódico da função $\sqrt{x(1-x)}$ definida no intervalo $[0,1]$ não é seccionalmente $C^1$ e portanto não está nas condições do Teorema 34.2. Contudo é seccionalmente monótona e limitada estando então nas condições do Teorema 34.1. Por outro lado, o prolongamento periódico da função $x^3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x}$ definida no intervalo $]0,1]$ está nas condições do Teorema 34.2 mas não nas do Teorema 34.1.

---

[2] Para explicar a notação utilizada neste enunciado temos (pela definição das várias notações)

$$\begin{aligned} f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right) &= \lim_{t\to x^+} f(t) + \lim_{t\to x^-} f(t) = \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t) + \lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \varepsilon>0}} \left(f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

## 34.4 Exemplo

Considere-se a função $f(x) = x$ definida no intervalo $]-\pi, \pi]$. Calculando os coeficientes da sua série de Fourier temos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

porque $f$ é uma função ímpar. Usando este mesmo facto temos (para $n \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}+\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

De acordo com os teoremas anteriores temos

$$\forall x \in \,]-\pi, \pi[ \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(nx) = x$$

para além dos resultados óbvios

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(-n\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\pi) = 0.$$

## 34.5 Séries de senos

Na consideração da equação de calor numa barra com extremidades a zero graus já nos depararmos com o problema de desenvolver em série de senos uma função $f$ definida num intervalo da forma $[0, \ell]$. Vamos resolver este problema fazendo o desenvolvimento em série de Fourier não da função $f$ no intervalo $[0, \ell]$ mas do seu prolongamento ímpar no intervalo $[-\ell, \ell]$. [3]

Dada então uma função $f$ definida no intervalo $[0, \ell]$, seja $\tilde{f}$ definida em $[-\ell, \ell]$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \,]0, \ell] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-\ell, 0[ \end{cases}.$$

[3] A propósito da consideração de intervalos abertos ou fechados ou abertos à esquerda...note-se que a série de Fourier de uma função fica inalterada se modificarmos esta função num ponto ou mesmo num conjunto de media nula; pois o cálculo dos coeficientes fica inalterado de acordo com propriedades bem conhecidas do cálculo integral.

Então

$$SF_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

com

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx. \end{aligned}$$

Reparando que no intervalo $[0, \ell]$ as funções $\tilde{f}$ e $f$ coincidem, obtemos a **série de senos** de $f$:

$$SS_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

com

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Podemos usar os teoremas anteriores para estudar em que pontos se tem a igualdade $SS_f(x) = f(x)$ através do estudo da igualdade $SF_{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x)$.

## 34.6 Séries de cosenos

Na consideração da equação de calor numa barra totalmente isolada já nos depararmos com o problema de desenvolver em série de cosenos uma função $f$ definida num intervalo da forma $[0, \ell]$. Vamos resolver este problema de forma análoga ao que fizemos para a série de cosenos, fazendo o desenvolvimento em série de Fourier não da função $f$ no intervalo $[0, \ell]$ mas do seu prolongamento par no intervalo $[-\ell, \ell]$.

Dada então uma função $f$ definida no intervalo $[0, \ell]$ seja $\tilde{f}$ definida em $[-\ell, \ell]$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, \ell] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-\ell, 0[ \end{cases}$$

Então

$$SF_{\tilde{f}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \right)$$

com

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \\ &= \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx \end{aligned}$$

Reparando que no intervalo $[0, \ell]$ as funções $\tilde{f}$ e $f$ coincidem, obtemos a **série de cosenos** de $f$:

$$SC_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

com

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx.$$

Podemos usar os teoremas anteriores para estudar em que pontos se tem a igualdade $SC_f(x) = f(x)$ através do estudo da igualdade $SF_{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}(x)$.

## 34.7 Exemplo

**Exemplo 34.1** *Considere-se* $f(x) = e^x$ *definida no intervalo* $[0, 1]$*. Temos*

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 e^x \cos(n\pi x)\, dx = \int_0^1 \left(e^{(1+in\pi)x} + e^{(1-in\pi)x}\right) dx = \frac{e^{(1+in\pi)} - 1}{1 + in\pi} + \frac{e^{(1-in\pi)} - 1}{1 - in\pi} \\ &= 2\frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 e^x \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = \frac{1}{i}\int_0^1 \left(e^{(1+in\pi)x} - e^{(1-in\pi)x}\right) dx = \frac{-1}{i} 2in\pi \frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \\ &= 2n\pi \frac{1 - e(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \end{aligned}$$

*Então a série de cosenos de $f$ é*

$$SC_f(x) = e - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{e(-1)^n - 1}{1 + n^2\pi^2} \cos(\pi n x),$$

*a série de senos de $f$ é*

$$SS_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\pi \frac{1 - e(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \operatorname{sen}(\pi n x),$$

*e a série de Fourier de $f$ é*

$$SF_f(x) = e - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{e - 1}{1 + 4n^2\pi^2} \left(\cos(2\pi n x) - 2n\pi \operatorname{sen}(2\pi n x)\right).$$

*E como $f$ é monótona, temos a seguinte convergência pontual:*

$$\begin{aligned} SC_f(x) &= e^x \qquad \text{para } x \in [0, 1], \\ SS_f(x) &= e^x \qquad \text{para } x \in \left]0, 1\right[ \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} SF_f(x) &= e^x \qquad \text{para } x \in \left]0, 1\right[ \\ \text{e} \quad SF_f(0) &= SF_f(1) = \frac{e + 1}{2}. \end{aligned}$$