33 ª Aula 2006.05.19 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

33.1 Soluções da equação do calor sem restrições.

De acordo com leis gerais da teoria do calor temos a seguinte equação que governa a temperatura u em função do tempo e da posição no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u),$$

designada por **equação do calor** e onde k é uma constante positiva denominada constante de difusão térmica. Informalmente $-K \operatorname{grad} u$ representa o fluxo de calor pela Lei de Fourier e por outro lado a variação de temperatura é proporcional à divergência do fluxo de calor. Uma vez que a divergência de um campo gradiente é o Laplaciano do potencial podemos escrever esta equação na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \operatorname{lap} u.$$

Com o único objectivo de simplicidade de exposição, e apesar de os métodos envolvidos serem trivialmente generalizáveis a dimensões superiores, vamos apenas considerar o caso do espaço unidimensional; i. e. u representará a temperatura num filamento e será função de x, a posição no referido filamento, e de t, variável que representará o tempo. Iremos então considerar a seguinte **equação do calor:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

33.1.1 Soluções de equilíbrio

Comecemos por notar que a função constante igual a zero ($u(x) = 0$ para todo x) é solução da equação; o que é característico de qualquer equação linear homogénea. Mas de facto, esta equação admite qualquer função constante como solução. Ou ainda de forma mais geral podemos verificar que as funções da forma $u = Ax + B$ são as soluções de equilíbrio desta equação, i. e. são todas as soluções que satisfazem $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

33.1.2 Combinação linear de soluções

Por outro lado se conhecermos duas funções u_1 e u_2 soluções da equação do calor então qualquer combinação linear destas é ainda uma solução da mesma equação. Isto é, se α e β forem escalares então

$$\alpha u_1 + \beta u_2$$

também é solução da equação do calor (em virtude desta propriedade, diz-se uma **equação linear homogénea**); de facto

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\frac{\partial u_1}{\partial t} + \beta\frac{\partial u_2}{\partial t} = \alpha k\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \beta k\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha u_1 + \beta u_2).$$

33.1.3 Soluções separáveis

Outro tipo de soluções simples que podemos procurar, são as soluções separáveis, i. e. soluções da forma $u(t,x) = T(t)\,X(x)$. Supondo esta forma para u obtemos na equação de calor

$$T'(t)\,X(x) = kT(t)\,X''(x)$$

Donde [1]

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constante } = \lambda,$$

uma vez que $\frac{T'(t)}{kT(t)}$ não depende de x e $\frac{X''(x)}{X(x)}$ não depende de t.
Tiramos as seguintes igualdades:

$$T'(t) = \lambda kT(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

Obtemos então as soluções (a menos de uma constante multiplicativa) $T(t) = e^{\lambda kt}$ e

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{se } \lambda \neq 0 \quad \text{e} \quad X(x) = A + Bx \quad \text{se } \lambda = 0.$$

Temos que as funções

$$u = e^{\lambda kt}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right) \quad \text{e} \quad u = A + Bx,$$

são soluções da equação do calor para quaisquer constantes A, B e $\lambda \neq 0$. Mas também qualquer combinação linear destas funções é solução, obtendo-se assim uma miríade de soluções da equação do calor. Para analisar as soluções desta equação precisaremos, portanto, de impor mais restrições a u de modo a que se possa obter alguma espécie de resultado de unicidade.

33.2 Condições fronteira de Dirichlet

Considere-se uma barra de comprimento L e constante de difusão térmica k. Estas são duas constantes positivas do sistema. Considere-se ainda que a barra está isolada excepto nas suas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$. Estas extremidades são postas em contacto com

[1] Ou mais rigorosamente

$$T'(t)\,X(x) - kT(t)\,X''(x) = 0 \Leftrightarrow (T'(t), kT(t)) \times (X''(x), X(x)) = 0$$

e usando o facto que o produto externo é nulo sse os vectores têm a mesma direcção ou um deles é nulo, concluímos que a direcção do vector $(T'(t), kT(t))$ é igual à direcção do vector $(X''(x), X(x))$ que é, portanto, neste caso, uma direcção constante. Como estamos a considerar que $X(x)$ não é identicamente nulo, existe um ponto x onde $X(x)$ não se anula (ou seja a direcção constante de $(X''(x), X(x))$ não é a direcção do vector $(1,0)$). Concluímos que existe λ tal que

$$(X''(x), X(x)) = X(x)(\lambda, 1) \quad \text{e} \quad (T'(t), kT(t)) = kT(t)(\lambda, 1).$$

um reservatório de calor à temperatura de 0 graus. Seja a $f(x)$ a distribuição inicial de temperatura. Temos então as seguintes condições:

$$\begin{cases} \textbf{Equação do calor} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{array}{l}\textbf{Condições fronteira} \\ \text{(de Dirichlet)}\end{array} & \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,L) = 0 \end{cases} \\ \textbf{Condição inicial} & u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{P1}$$

A estratégia vai ser determinar uma fórmula muito geral da solução do seguinte parte do problema que é linear homogéneo:_

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,L) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{P1H}$$

Uma vez que não se impõe neste problema homogéneo nenhuma condição inicial devemos ter uma miríade de soluções. Por outro lado fazendo combinações lineares de soluções deste problema obtemos novas soluções (é esta a característica dos problemas lineares homogéneos). Vamos então determinar soluções simples (leia-se separadas) deste problema homogéneo, com a forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Note-se que podemos supor que T e X não são identicamente nulas, uma vez que esta solução identicamente nula é trivial e irrelevante (excepto para o caso em que a condição inicial também é identicamente nula). Por conseguinte transformamos (P1H) em

$$\begin{cases} T'(t)X(x) = kT(t)X''(x) \\ \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Donde

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constante } = \lambda,$$

e portanto

$$T'(t) = \lambda k T(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{com} \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Resolvendo a equação em T obtemos (a menos de uma constante multiplicativa) $e^{\lambda k t}$. Para equação em X vem

$$X(x) = A + Bx \quad \text{se } \lambda = 0 \quad \text{e} \quad X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{se } \lambda \neq 0.$$

tendo-se que se impor ainda $X(0) = X(L) = 0$. Portanto

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = A + BL = 0 \end{cases} \quad \text{se } \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

ou seja

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{se } \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} B = -A \\ X(L) = A\left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{se } \lambda \neq 0.$$

Concluímos que se $\lambda = 0$ apenas obtemos a solução trivial nula. Para $\lambda \neq 0$ e para obter uma solução não trivial temos de ter

$$e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0,$$

donde $e^{2\sqrt{\lambda}kL} = 1$. Portanto $2\sqrt{\lambda}L = i2\pi n$ com $n \in \mathbb{Z}$, i. e.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{i\pi n}{L}, \quad \text{ou seja} \quad \lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}.$$

Uma vez que para n e para $-n$ obtemos os mesmo valor de λ e as mesmas soluções, e porque $\lambda \neq 0$, podemos considerar $n \in \mathbb{N}_1$. Portanto para estes valores de λ vem

$$T(t) = e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \quad \text{e} \quad X(x) = A\left(e^{\frac{i\pi n}{L}x} - e^{-\frac{i\pi n}{L}x}\right) = \tilde{A}\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Concluindo-se que para cada $n \in \mathbb{N}_1$ obtemos uma solução de (P1H) dada por (a menos de uma constante multiplicativa):

$$u(t,x) = e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Fazendo combinações lineares destas soluções (porque o problema é linear homogéneo) obtemos soluções da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

e finalmente a seguinte solução formal (é solução desde que as derivações comutem com a soma infinita que é a série[2])

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{33.1}$$

onde as constantes b_n (com $n = 1, 2...$) são obtidas através da igualdade

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

[2]Isto acontece se por exemplo (a condição é suficiente mas não necessária) a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |b_n|$$

é convergente.

Exemplo 33.1 *Considere-se o problema* [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,1) = 0 \end{cases} \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + 3\operatorname{sen}(5\pi x) \end{cases}$$

Temos então

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\pi^2 n^2 t} \operatorname{sen}(\pi n x),$$

com

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(\pi n x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + 3\operatorname{sen}(5\pi x).$$

Concluímos que $b_n = 0$ *se* $n \neq 2$ *e se* $n \neq 5$, $b_2 = 1$ *e* $b_5 = 3$. *Portanto a solução do problema é*

$$u(t,x) = e^{-4\pi^2 t} \operatorname{sen}(2\pi x) + 3e^{-25\pi^2 t} \operatorname{sen}(5\pi x).$$

33.3 Condições fronteira de Neumann

Vamos agora considerar o caso em que a barra se encontra isolada, sendo portanto nulo o fluxo de calor nas extremidades da barra. Esta condição traduz-se pelas relações $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0$ que substituem a imposição de temperatura constante do problema anterior. Obtemos assim o problema da equação de calor com condições fronteira de Neumann:

$$\begin{cases} \textbf{Equação do calor} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \textbf{Condições fronteira} \\ \text{(de Neumann)} & \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 \end{cases} \\ \textbf{Condição inicial} & u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{P2}$$

Procedendo com cálculos análogos aos utilizados no problema com condições fronteira de Dirichlet, ou notando que a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ satisfaz o problema anterior (supondo adicionalmente

[3] Ou seja, está-se a tomar no problema exposto, $L = 1$, $k = 1$ e

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + 3\operatorname{sen}(5\pi x).$$

que u é três vezes diferenciável) e primitivando (formalmente) a igualdade

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

chegamos a

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 k}{L^2}t} \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

onde as constantes a_n (com $n = 1, 2...$) são obtidas através da igualdade

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

33.4 Condições fronteira periódicas

Considere-se agora que dobramos a barra de comprimento L de forma a juntarmos as extremidades $x = 0$ e $x = L$. Isto é formamos um anel que é parametrizado pela coordenada x com a identificação dos valores $x = 0$ e $x = L$. Pensar neste processo de dobragem em vez de encarar apenas um anel permite a consideração de distribuições iniciais ($t = 0$) de temperatura $f(x)$ que tenham valores distintos em $x = 0$ e $x = L$. Identificando então a temperatura e o fluxo de calor nos pontos $x = 0$ e $x = L$, para $t > 0$, obtemos o seguinte conjunto de condições:

$$\begin{cases} \textbf{Equação do calor} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{array}{l}\textbf{Condições fronteira} \\ \text{(periódicas)}\end{array} & \begin{cases} u(t,0) = u(t,L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) \end{cases} \\ \textbf{Condição inicial} & u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{P3}$$

Para resolver este problema e tal como anteriormente, a estratégia vai ser determinar uma fórmula muito geral da solução da seguinte parte do problema que é linear homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \begin{cases} u(t,0) = u(t,L) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) \end{cases} \end{cases} \tag{P3H}$$

Uma vez que não se impõe neste problema homogéneo nenhuma condição inicial será possível obter uma grande diversidade de soluções simples (leia-se separadas). Por outro lado fazendo combinações lineares destas soluções construiremos uma solução geral formal que servirá para construir a solução do problema com condição inicial. Vamos então determinar soluções do problema homogéneo da forma $u(t,x) = T(t)\,X(x)$. Por conseguinte transformamos (P3H) em

$$\begin{cases} T'(t)\,X(x) = kT(t)\,X''(x) \\ \begin{cases} X(0) = X(L) \\ X'(0) = X'(L) \end{cases} \end{cases}$$

Donde

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constante } = \lambda,$$

e portanto

$$T'(t) = \lambda k T(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{com} \quad X(0) = X(L) \quad \text{e} \quad X'(0) = X'(L)\,.$$

Resolvendo a equação para T obtemos (a menos de uma constante multiplicativa) $e^{\lambda k t}$. Da equação para a função X vem

$$\begin{aligned} X(x) &= A + Bx \quad \text{se } \lambda = 0 \\ X(x) &= Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{se } \lambda \neq 0, \end{aligned}$$

tendo-se que se impor ainda as condições fronteira. Portanto

$$\begin{cases} X(0) = A = A + BL = X(L) \\ X'(0) = B = X'(L) \end{cases} \quad \text{se } \lambda = 0$$

$$\begin{cases} X(0) = A + B = Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = X(L) \\ X'(0) = \sqrt{\lambda}\,(A - B) = \sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}L} - Be^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = X(L) \end{cases} \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

ou seja

$$B = 0 \quad \text{se } \lambda = 0$$

$$\begin{cases} A\left(1 - e^{\sqrt{\lambda}L}\right) + B\left(1 - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \\ A\left(1 - e^{\sqrt{\lambda}L}\right) - B\left(1 - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

Concluímos que se $\lambda = 0$ apenas obtemos a solução constante. Para $\lambda \neq 0$ vem

$$A\left(1 - e^{\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \quad \text{e} \quad B\left(1 - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0,$$

mas como $1 = e^{\sqrt{\lambda}L}$ é equivalente a $1 = e^{-\sqrt{\lambda}L}$, parta obter uma solução não trivial temos de ter

$$1 = e^{\sqrt{\lambda}L}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}L &= i2\pi n \quad \text{com } n \in \mathbb{Z} \\ \text{i. e. } \sqrt{\lambda} &= \frac{i2\pi n}{L} \quad \text{com } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\lambda = -\frac{4\pi^2 n^2}{L^2}.$$

Uma vez que para n e para $-n$ obtemos os mesmo valor de λ e as mesmas soluções, e porque $\lambda \neq 0$, podemos considerar $n \in \mathbb{N}_1$. Portanto para estes valores de λ vem

$$T(t) = e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k}{L^2} t}$$

e

$$X(x) = Ae^{\frac{i2\pi n}{L}x} + Be^{-\frac{i2\pi n}{L}x} = \tilde{A}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \tilde{B}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

Portanto para cada $n \in \mathbb{N}_1$ obtemos uma solução de (P3H) dada por:

$$u(t,x) = e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k}{L^2} t}\left(\tilde{A}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \tilde{B}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right).$$

Fazendo combinações lineares destas soluções (porque o problema é linear homogéneo) obtemos soluções da forma

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k}{L^2} t}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right),$$

onde $\frac{a_0}{2}$ representa a solução constante determinada anteriormente (no caso $\lambda = 0$); e finalmente, a seguinte solução formal (é solução desde que as derivações comutem com a soma infinita que é a série[4])

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k}{L^2} t}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right)$$

onde as constantes a_n e b_n são obtidas através da igualdade

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right)$$

[4] Isto acontece se por exemplo (a condição é suficiente mas não necessária) a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(|a_n| + |b_n|\right)$$

é convergente.