31 ª Aula 2006.05.15 $\boxed{\textbf{AMIV}_{\text{LEC}}}$ Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

31.1 Redução a um sistema de n equações de 1ª ordem

Recorde-se que a EDO linear de ordem n (escalar) tem a forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h(t) \tag{31.1}$$

e é equivalente a um sistema de equações de primeira ordem: definindo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ x_3(t) &= y''(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_0\, x_1 - a_1\, x_2 - a_2\, x_3 \cdots - a_{n-2}\, x_{n-1} - a_{n-1}\, x_n + h(t) \end{cases}$$

Pelo que, a redução acima descrita fica:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$$

onde $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$, a matriz $\mathbf{A}$, designada por matriz companheira, é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

31.2 Matriz Wronskiana. Independência linear de funções

Pelo Teorema **30.1** é fácil determinar a solução geral da equação homogénea associada. Por outro lado sabemos que esta solução é dada pela exponencial da matriz companheira. Pelo que vamos usar a solução geral da equação homogénea para calcular a exponencial da matriz companheira com o objectivo da utilizar na fórmula da variação das constantes (Teorema **29.1**).

Sejam $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

e vamos construir a **matriz Wronskiana** destas funções u_1, u_2, ...,u_n:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & u_3' & \cdots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & \cdots & u_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & u_3^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Cada uma das colunas de $\mathbf{W}(t)$ são soluções do sistema $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ para a matriz companheira $\mathbf{A}$. Temos mesmo a seguinte igualdade matricial

$$\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{W}(t).$$

Facilmente reconhecemos que as colunas desta matriz Wronskiana são linearmente independentes sse u_1, u_2, ...,u_n (funções de classe C^{n-1}) são linearmente independentes [1]. Por outro lado, para cada t_0, a coluna $\mathbf{y}_k(t) = \left(u_k, u_k', u_k'', \cdots, u_k^{(n-1)}\right)$ é solução do problema de valor inicial $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_k(t_0)$. Pelo que, uma combinação linear qualquer destas funções vectoriais, digamos $\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t)$, é solução do problema de valor inicial $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \alpha_1\mathbf{y}_1(t_0) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t_0)$. Dado que as colunas $\mathbf{y}_k(t)$ são linearmente independentes (como funções vectoriais) concluímos, pela unicidade da solução, que para cada instante t_0 fixo, os vectores $\mathbf{y}_k(t_0)$ são linearmente independentes[2]. Portanto o determinante da matriz formada por estas colunas não se anula:

$$\forall t \qquad \det \mathbf{W}(t) \neq 0.$$

Podemos agora verificar que $\quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0$

é solução do seguinte problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

---

[1] Porque para funções (n-1)-vezes diferenciáveis temos que

$$\forall t \qquad \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \cdots + \alpha_n u_n(t) = 0$$

é equivalente a

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \qquad \forall t \qquad \alpha_1 u_1^{(k)}(t) + \alpha_2 u_2^{(k)}(t) + \cdots + \alpha_n u_n^{(k)}(t) = 0.$$

[2] De facto se tivermos $\alpha_1\mathbf{y}_1(t_0) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t_0) = \mathbf{0}$, então $\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t)$ é solução de $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Como a solução deste problema é única, vem

$$\forall t \qquad \alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{0}.$$

Sendo as funções $\mathbf{y}_k(t)$ linearmente independentes, concluímos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

De facto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t)\right)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0\\ &= \mathbf{AW}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0\\ &= \mathbf{Ay}(t)\end{aligned}$$

e $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{W}(t_0)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0$.

Pela unicidade da solução concluímos (no caso de a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1, a_0 serem coeficientes constantes) que $\mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}$.

Observação 31.1 *No caso de a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1, a_0 serem funções de t (coeficientes* ***não*** *constantes) a função vectorial $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0$ é ainda a solução do problema $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Contudo, para calcular a matriz Wronskiana $\mathbf{W}(t)$ necessitamos de conhecer as funções $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea; e no caso de coeficientes* ***não*** *constantes não existe nenhum método geral para obter estas soluções $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$.*

31.3 Fórmula da variação das constantes

Temos então pela fórmula dos da variação das constantes (para sistemas de equações - Teorema **29.1**) que a solução da equação 31.1 é dada por[3]

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds,$$

[3]Podemos também fazer uma verificação directa, que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{W}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{W}^{-1}(s)\,\mathbf{h}(s)\,ds$$

é solução de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{h}(t)$ com $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. De facto usando apenas que $\mathbf{W}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{W}(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{W}'(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{W}'(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{W}^{-1}(s)\,\mathbf{h}(t)\,ds + \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)\\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(t)\,\mathbf{W}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{W}^{-1}(s)\,\mathbf{h}(t)\,ds + \mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)\\ &= \mathbf{A}(t)\left(\mathbf{W}(t)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{W}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{W}^{-1}(s)\,\mathbf{h}(t)\,ds\right) + \mathbf{h}(t)\\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t),\end{aligned}$$

e também

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{W}(t_0)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{W}(t_0)\int_{t_0}^{t_0}\mathbf{W}^{-1}(s)\,\mathbf{h}(s)\,ds = \mathbf{W}(t_0)\,\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0.$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{W}(t) \left(\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds \right) = \mathbf{W}(t) \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix}.$$

Note-se ainda que

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{W}^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(s) \end{bmatrix} ds$$

é um vector constante $\mathbf{W}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y_0}$ mais um integral indefinido de uma certa função vectorial $(\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t))$, ou seja é uma primitiva dessa função vectorial $(\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t))$. Pelo que

$$y(t) = c_1(t)\,u_1(t) + c_2(t)\,u_2(t) + \cdots + c_n(t)\,u_n(t)$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix} dt$$

com $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e $\mathbf{W}(t)$ a sua matriz Wronskiana

Observação 31.2 *Definindo* $\mathbf{f}(t) = \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *temos* $\mathbf{W}(t)\,\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Pelo que* $\mathbf{f}(t)$ *pode ser calculado resolvendo este sistema (sem necessidade de inverter a matriz* $\mathbf{W}(t)$*). Pelo que a fórmula da variação das constantes fica*

$$y(t) = c_1(t)\,u_1(t) + c_2(t)\,u_2(t) + \cdots + c_n(t)\,u_n(t)$$

com

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{f}(t)\,h(t)\,dt, \qquad \text{onde } \mathbf{f}(t) \text{ é obtido resolvendo } \mathbf{W}(t)\,\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 31.1 *Considere-se* $t > -1$ *e a equação definida por*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t}.$$

O polinómio característico da equação homogénea é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ *. A solução geral da equação homogénea é então* $C_1\, e^t + C_2\, te^t$*. Podemos agora construir a matriz Wronskiana:*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)\, e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & (t+1) \end{bmatrix}$$

Temos $\det \mathbf{W} = e^{2t}$ *e* $\mathbf{W}^{-1} = e^{-t} \begin{bmatrix} \blacksquare & -t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix}$*. Então a solução geral é, pela fórmula da variação das constantes,*

$$y(t) = c_1(t)\ e^t + c_2(t)\ te^t$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t} \end{bmatrix} dt = \int e^{-t} \begin{bmatrix} \blacksquare & -t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \int \begin{bmatrix} -\frac{t}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\int \frac{t}{1+t}\, dt \\ \int \frac{1}{1+t}\, dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(1+t) - t + k_1 \\ \log(1+t) + k_2 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$y(t) = (\log(1+t) - t + t\log(1+t))\ e^t + k_1\, e^t + k_2\, te^t.$$

31.4 Equação Linear de coeficientes não constantes

De acordo com a Observação 31.1, facilmente constatamos que a fórmula da variação das constantes ainda é válida no caso de os coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_0$ serem funções de t:

Considere-se a equação linear de coeficientes **não** constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\ y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\ y^{(n-2)} + \cdots + a_2(t)\ y'' + a_1(t)\ y' + a_0(t)\ y = h(t),$$

onde $a_{n-1}(t)$, $a_{n-2}(t)$... $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $h(t)$ são funções (dadas) definidas num intervalo real I e $y \equiv y(t)$ é a função procurada (incógnita).

Dadas as soluções[4] $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_n(t)$ linearmente independentes da equação homogénea associada :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\ y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\ y^{(n-2)} + \cdots + a_2(t)\ y'' + a_1(t)\ y' + a_0(t)\ y = 0,$$

podemos construir a sua matriz Wronskiana $\mathbf{W}(t)$

Pelo que, de igual modo ao exposto para o caso de coeficientes constantes, podemos concluir que a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1(t)\, u_1(t) + c_2(t)\, u_2(t) + \cdots + c_n(t)\, u_n(t)$$

onde

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}(t) \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix} dt$$

[4] Não existe nenhum método geral de obter estas funções no presente caso de coeficientes **não** constantes.

com $u_1(t)$, $u_2(t)$, ...,$u_n(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e $\mathbf{W}(t)$ a sua matriz Wronskiana.

Exemplo 31.2 *Considere-se a seguinte EDO linear de 2ª ordem*

$$y'' + \frac{2t}{1+t^2}y' = \frac{1}{1+t^2}. \tag{31.2}$$

A equação homogénea associada é $y'' + \frac{2t}{1+t^2}y' = 0$. *Podemos verificar que*

$$u_1(t) = 1 \qquad e \qquad u_2(t) = \operatorname{arctg} t$$

são soluções desta equação homogénea[5]. *O matriz Wronskiana destas funções é*

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{arctg} t \\ 0 & \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Temos $\det \mathbf{W} = \dfrac{1}{1+t^2}$ *($\neq 0$, o que implica que u_1 e u_2 são linearmente independentes). E, pelo método dos cofactores,*

$$\mathbf{W}^{-1} = \left(1+t^2\right) \begin{bmatrix} \blacksquare & -\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & -\left(1+t^2\right)\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1+t^2 \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes a solução de (31.2) é dada por

$$y(t) = c_1(t) + c_2(t)\operatorname{arctg} t$$

onde

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} &= \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt \\
&= \int \begin{bmatrix} \blacksquare & -\left(1+t^2\right)\operatorname{arctg} t \\ \blacksquare & 1+t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt \\
&= \int \begin{bmatrix} -\operatorname{arctg} t \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -\int \operatorname{arctg} t \, dt \\ \int dt \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -t\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2} + k_1 \\ t + k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto a solução geral de (31.2) é

$$\begin{aligned}
y(t) &= -t\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2} + k_1 + (t+k_2)\operatorname{arctg} t \\
&= k_1 + k_2\operatorname{arctg} t + \log\sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

Observação 31.3 *Neste último exemplo poderíamos ter feito a redução $u = y'$, obtendo-se a equação de primeira ordem* $u' + \dfrac{2t}{1+t^2}u = \dfrac{1}{1+t^2}$.

---

[5] A solução geral desta equação homogénea é, portanto, $y(t) = k_1 + k_2 \operatorname{arctg} t$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.