30 $^{\text{a}}$ Aula 2006.05.12 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

30.1 Operadores diferenciais

A equação diferencial linear homogénea de ordem n (de coeficientes constantes):

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{H}$$

pode-se escrever na forma

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\,\frac{d^2}{dt^2} + a_1\,\frac{d}{dt} + a_0\right)\, y = 0 \tag{H}$$

Podemos encarar o símbolo

$$\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\,\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\,\frac{d^2}{dt^2} + a_1\,\frac{d}{dt} + a_0$$

como um operador num espaço de funções que a uma função y faz corresponder a função $y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y$. Este tipo de operadores designam-se por **operadores diferenciais** lineares de coeficientes constantes e possibilitam a formalização de um cálculo simbólico.

Exemplo 30.1 *Considere-se a equação*

$$y'' + 3y' + 2y = 0. \tag{30.1}$$

Temos

$$y'' + 3y' + 2y = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) y$$

Mas por outro lado

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= y'' + y' + 2\,(y' + y) = \frac{d}{dt}\,(y' + y) + 2\,(y' + y) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right)(y' + y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= y'' + 2y' + y' + 2y = \frac{d}{dt}\,(y' + 2y) + y' + 2y = \left(\frac{d}{dt} + 1\right)(y' + 2y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right) y \end{aligned}$$

donde

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right)\left(\frac{d}{dt} + 1\right) = \left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right)$$

Note-se que o polinómio característico é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$ *; portanto* $\lambda = -2$ *e* $\lambda = -1$ *são as raizes deste polinómio característico.*

Por outro lado $\left(\frac{d}{dt} + 2\right) y = 0$ *é* $y' + 2y = 0$ *que tem como solução (é uma equação linear de 1ª ordem)* $y = ke^{-2t}$*. Do mesmo modo* $\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y = 0 \Leftrightarrow y = ke^{-t}$*. Como a* e^{-2t} *e* e^{-t} *são linearmente independentes e soluções de (30.1) que é uma equação de ordem* 2*, concluímos que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}$$

onde k_1 *e* k_2 *são constantes arbitrárias (a determinar por condições iniciais ou de fronteira).*

Estas constantes poderão ser determinadas impondo novas condições a $y(t)$ *como por exemplo as condições iniciais* $y(0) = 0$*;* $y'(0) = 1$*, que levam aos cálculos:*

$$y(0) = k_1 + k_2 = 0; \qquad y'(t) = -2k_1 e^{-2t} - k_2 e^{-t}; \qquad y'(0) = -2k_1 - k_2 = 1,$$

portanto $k_1 = -k_2$ *e* $k_2 = -2k_1 - k_2 = 1$*, donde* $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$*.*

Facilmente se reconhece que estabelecer igualdades com estes operadores é equivalente a estabelecê-las para os polinómios que se obtêm destes operadores substituindo o operador $\frac{d}{dt}$ pela variável (complexa) λ.

30.2 Solução geral da equação homogénea

Teorema 30.1 *Se* λ_1*,* $\lambda_2 ... \lambda_j$ *são as raizes do polinómio característico e* m_1*,* $m_2 ... m_j$ *as suas respectivas multiplicidades, então*

$$y(t) = t^p \, e^{\lambda_k t} \qquad\qquad p = 0, ..., m_k - 1 \qquad k = 1, ..., j$$

constituem n $(m_1 + m_2 + ... + m_j = n)$ *soluções linearmente independentes da equação (H).*

Considerado a factorização do polinómio característico, obtemos que a equação (H) é equivalente a

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{m_j} y = 0 \tag{H}$$

Notando que, para $p \in \{0, ..., m_k - 1\}$, vem

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{m_j} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} y = 0,$$

o teorema ficará demonstrado quando mostramos que $y(t) = t^p \, e^{\lambda_k t}$ é solução de

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} y = 0.$$

30.2.1 Soluções $t^p\, e^{\lambda_k t}$

Comecemos por notar que ($p \geqslant 0$)

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right) t^p\, e^{\lambda_k t} = pt^{p-1}\, e^{\lambda_k t} + t^p\, \lambda_k e^{\lambda_k t} - \lambda_k t^p\, e^{\lambda_k t} = pt^{p-1}\, e^{\lambda_k t}$$

Então ($p \in \{0, ..., m_k - 1\}$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} t^p\, e^{\lambda_k t} &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - 1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right) t^p\, e^{\lambda_k t} = p \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - 1} t^{p-1}\, e^{\lambda_k t} \\ &= p\,(p-1)\,...1 \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k - p} e^{\lambda_k t} = 0\end{aligned}$$

Exercício 30.1 *Mostrar que $t^p\, e^{\lambda_k t}$, $p = 0, ..., m_k - 1$, $k = 1, ..., j$, são funções (de t) linearmente independentes (Note-se $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ se $k \neq k'$).*

30.2.2 Raizes complexas conjugadas

Se λ é uma raiz complexa com multiplicidade m de um polinómio característico com coeficientes (a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1 e a_0) reais, então o número $\bar{\lambda}$ (complexo conjugado de λ) também é raiz, com a mesma multiplicidade m, do mesmo polinómio. Pelo que neste caso temos as soluções (da equação linear homogénea)

$$t^p\, e^{\lambda t} \qquad \text{e} \qquad t^p\, e^{\bar{\lambda} t}$$

com $p \in \{0, ..., m - 1\}$.Então as seguintes combinações lineares destas ainda são soluções:

$$\frac{1}{2} t^p\, e^{\lambda t} + \frac{1}{2} t^p\, e^{\bar{\lambda} t} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2i} t^p\, e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} t^p\, e^{\bar{\lambda} t}.$$

Portanto, obtemos as seguintes soluções reais linearmente independentes (no caso $\beta \neq 0$)

$$t^p e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad \text{e} \qquad t^p e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t),$$

onde $\alpha = \operatorname{Re} \lambda$ e $\beta = \operatorname{Im} \lambda$.

30.2.3 Exemplos

Exemplo 30.2 $y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26$.

$\lambda = 2$ *é uma raiz* ($8 - 32 + 50 - 26 = 0$)

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|rrr|r} & 1 & -8 & 25 & -26 \\ 2 & & 2 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & 0 \end{array}$$

Polinómio característico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 13\right) = (\lambda - 2)\left((\lambda - 3)^2 + 4\right)$

Raizes do polinómio característico: $\lambda = 2$; $\lambda = 3 + i2$; $\lambda = 3 - i2$.

Soluções linearmente independentes: e^{2t}; $e^{3t}\cos(2t)$; $e^{3t}\operatorname{sen}(2t)$.

Solução geral:

$$y(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, e^{3t}\cos(2t) + k_3\, e^{3t}\operatorname{sen}(2t),$$

onde k_1 k_2 *e* k_3 *são constantes arbitrárias.*

Exemplo 30.3 $\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$

Polinómio característico: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$

Raizes do polinómio característico: $\lambda = i$; $\lambda = -i$ *ambas com multiplicidade* 2.

Soluções linearmente independentes: $\cos t$; $\operatorname{sen} t$; $t\cos t$ *e* $t \operatorname{sen} t$

Solução geral:

$$y(t) = k_1\, \cos t + k_2\, \operatorname{sen} t + k_3\, t\cos t + k_4\, t \operatorname{sen} t,$$

onde k_1, k_2, k_3 *e* k_4 *são constantes arbitrárias.*

30.3 Método dos coeficientes indeterminados

30.3.1 Fundamentação

Vamos agora abordar a EDO de coeficientes constantes, mas não homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h(t) \tag{30.2}$$

que vamos escrever na forma:

$$Ly = h$$

onde

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0$$

Embora já tenhamos o método da variação das constantes para resolver este problema, vamos elaborar um método que envolve menos cálculos. Este método dos coeficientes indeterminados tem contudo um campo de aplicação muito restrito como iremos ver.

Hipótese: Suponha-se agora que a função h é solução de uma EDO linear homogénea de coeficientes constantes.

Existe portanto um operador diferencial

$$\tilde{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \tilde{a}_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \tilde{a}_{m-2}\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} + \cdots + \tilde{a}_2\frac{d^2}{dt^2} + \tilde{a}_1\frac{d}{dt} + \tilde{a}_0$$

tal que $\tilde{L}h = 0$. Então se $Ly = h$, vem $\tilde{L}Ly = \tilde{L}h$, e portanto,

$$\left(\tilde{L}L\right) z = 0, \tag{30.3}$$

isto é, podemos procurar uma solução particular da equação não homogénea (30.2) na solução geral da equação homogénea (30.3). Note-se ainda que o polinómio característico desta equação (30.3) é o produto dos polinómios característicos correspondentes ao operador L e ao operador $\tilde{L}$. Portanto a solução geral de (30.3) é dada por $y = y_1 + y_2$, onde y_1 é a solução geral da equação homogénea $Ly_1 = 0$. Pelo que iremos procurar os coeficientes de y_2 de tal forma que $Ly_2 = h$, uma vez que $Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_2$.

30.3.2 Exemplos

Exemplo 30.4 *Considere-se a seguinte equação*

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t.$$

Neste caso $L = \frac{d^4}{dt^4} + 2\frac{d^2}{dt^2} + 1$ *e* $h = e^t$. *Facilmente reconhecemos que a função* e^t *é solução de uma equação homogéneo para a qual o polinómio característico tenha a raiz* $\lambda = 1$ $(e^t = e^{\lambda t})$. *Portanto podemos tomar o polinómio (binómio)* $\lambda - 1$ *e o operador* $\tilde{L} = \frac{d}{dt} - 1$ *de facto*

$$\tilde{L}e^t = \frac{de^t}{dt} - e^t = e^t - e^t = 0.$$

Então as soluções de $Ly = h$ *são soluções de* $L\tilde{L}y = 0$. *Esta última equação homogénea tem polinómio característico*

$$\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 1) = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 (\lambda - 1)$$

pelo que $y = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 t \cos t + k_4 t \operatorname{sen} t + \alpha e^t$. *Então*

$$\begin{aligned} Ly &= L(k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 t \cos t + k_4 t \operatorname{sen} t) + \alpha L e^t = \alpha L e^t \\ &= \alpha \left(\frac{d^4}{dt^4} e^t + 2\frac{d^2}{dt^2} e^t + e^t \right) = \alpha 4 e^t \end{aligned}$$

Para que $Ly = h = e^t$ *vem* $\alpha 4 = 1$. *Pelo que a solução geral é*

$$y = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 t \cos t + k_4 t \operatorname{sen} t + \frac{e^t}{4},$$

onde k_1, k_2, k_3 *e* k_4 *são constantes arbitrárias.*

Exemplo 30.5 *Considere-se a seguinte equação*[1]

$$y'' - 3y' + 2y = te^t$$

Facilmente reconhecemos que a função te^t *é solução de uma equação homogénea para a qual o polinómio característico tenha a raiz* $\lambda = 1$ *com multiplicidade* m *(pelo menos) igual a dois*

[1] Neste caso $L = \frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 2$ e $h = te^t$.

$(te^t = t^{m-1}e^{\lambda t})^2$. Então as soluções da equação são soluções de uma equação homogénea[3] *que tem polinómio característico*

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3$$

pelo que $y = k_1\, e^{2t} + k_2\, e^t + \alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t$. Então

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= \left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right)'' - 3\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right)' + 2\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right) \\ &= \left(\alpha\,(1+t)\, e^t + \beta\,\left(2t + t^2\right) e^t\right)' - 3\left(\alpha\,(1+t)\, e^t + \beta\,\left(2t + t^2\right) e^t\right) \\ &\quad +2\left(\alpha\, te^t + \beta\, t^2 e^t\right) \\ &= \left(\alpha\,(2+t)\, e^t + \beta\,\left(2 + 4t + t^2\right) e^t\right) - 3\alpha e^t + (-3\alpha - 6\beta + 2\alpha)\, te^t \\ &\quad + (-3\beta + 2\beta)\, t^2 e^t \\ &= (2\alpha + 2\beta - 3\alpha)\, e^t + (\alpha + 4\beta - \alpha - 6\beta)\, te^t + (\beta - \beta)\, t^2 e^t \\ &= (2\beta - \alpha)\, e^t + -2\beta te^t \end{aligned}$$

Concluímos portanto que

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases}$$

donde $\beta = \frac{-1}{2}$ e $\alpha = -1$. Pelo que a solução geral é $y(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, e^t - te^t - \frac{t^2}{2} e^t$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

Introduzindo outras condições poder-se-á eventualmente calcular os coeficientes k_1 e k_2 desta solução. Por exemplo se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos, de

$$y'(t) = 2k_1\, e^{2t} + k_2\, e^t - (1+t)\, e^t - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^t,$$

as equações

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

donde $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$ e $y(t) = e^{2t} - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) e^t$.

30.3.3 Limitações

Ao contrário do método da variação das constantes, o método dos coeficientes indeterminados só se aplica a EDO's lineares de coeficientes constantes. Mas outra restrição importante é a hipótese que foi feita sobre h:

A função h tem de ser uma combinação linear de funções do tipo $t^p\, e^{\lambda t}$

Por exemplo a equação $y''' - y' = \operatorname{arctg} t$ não pode ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados mas pode ser resolvida pela fórmula da variação das constantes.

---

[2] Portanto podemos tomar o polinómio $(\lambda - 1)^2$ correspondente ao operador $\tilde{L} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)^2$. De facto

$$\tilde{L}\left(te^t\right) = \left(\tfrac{d}{dt} - 1\right)^2 \left(te^t\right) = \left(\tfrac{d}{dt} - 1\right)\left(\left(te^t\right)' - \left(te^t\right)\right) = \left(\tfrac{d}{dt} - 1\right) e^t = 0$$

[3] I. e. as soluções de $Ly = h$ são soluções de $L\tilde{L}y = 0$.