29 ª Aula 2006.05.10 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

29.1 Fórmula da variação das constantes.

Voltemos a considerar o sistema

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante (não depende de t) e $\mathbf{B}(t)$ é um a função definida para valores de t num intervalo real I com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, na nossa notação, com valores nas matrizes $n \times 1$).

Agora que já estamos familiarizados com as exponenciais de matrizes podemos facilmente mostrar o seguinte teorema.

Teorema 29.1 *(**Fórmula da variação das constantes** para sistema de equações de coeficientes constantes)*

Seja $\mathbf{B} : I \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes . Então o problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

tem uma única solução definida em I dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\,ds$$

Observação 29.1 *A parcela $\mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y_0}$ corresponde à solução da equação homogénea e a parcela $\int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\,ds$ corresponde à solução do problema para a condição inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0}$. Temos então a seguinte situação que é geral para as equações lineares e que demonstraremos a seguir:*

$$\boxed{\textit{Solução geral da equação linear}} = \boxed{\textit{Solução geral da equação homogénea associada}} + \boxed{\textit{Solução particular da equação linear}}$$

Demonstração. *Atendendo às propriedades conhecidas da exponencial de matrizes, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\frac{d}{dt}\mathbf{y} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}\right) = \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-(\mathbf{s}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\,ds \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}(t_0) + \mathbf{e}^{(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}^{-(\mathbf{s}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{B}(s)\,ds
\end{aligned}$$

■

Exemplo 29.1 *Considere-se o seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial na forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 0 \quad e \quad \mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a fórmula da variação das constantes a solução é dada por (o cálculo de $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ *foi feito anteriormente no Exemplo* ***27.1*** *)*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \mathbf{e}^{(t-s)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{4(t-s)}+e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4(t-s)}-e^{2(t-s)}}{2} \\ \frac{e^{4(t-s)}-e^{2(t-s)}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2(t-s)}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{4t-3s} + e^{2t-s} \\ e^{4t-3s} - e^{2t-s} \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int_0^t \left(e^{4t-3s} + e^{2t-s}\right) ds \\ \int_0^t \left(e^{4t-3s} - e^{2t-s}\right) ds \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^t + e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \\ \frac{2}{3}e^t - e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos de seguida mostrar a relação geral

$$\boxed{\textbf{Solução geral da equação linear}} = \boxed{\textbf{Solução geral da equação homogénea associada}} + \boxed{\textbf{Solução particular da equação linear}}$$

Teorema 29.2 *Se* $\mathbf{y}(t)$ *e* $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ *são soluções de* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}$*, então*

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{u}(t)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ *é solução da equação homogénea* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Portanto se conhecermos uma solução particular $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ podemos conhecer qualquer solução $\mathbf{y}(t)$ se conhecermos todas as soluções $\mathbf{u}(t)$ da equação homogénea.

Demonstração. Seja $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)$, então

$$\left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{u}(t) = \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\mathbf{y}(t) - \left(\frac{d}{dt} - \mathbf{A}\right)\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B} - \mathbf{B} = 0$$

■

Observação 29.2 *Note-se que o resultado e a demonstração apenas precisam da hipótese* ”$\dfrac{d}{dt} - \mathbf{A}$ *é um operador linear” e é válida portanto para qualquer equação do tipo* $\mathbf{Ly} = \mathbf{B}$*, onde* $\mathbf{L}$ *é um operador linear num certo espaço (de funções)* E *e* $\mathbf{B}$ *um elemento desse espaço. Resumindo, se* $\mathbf{L} : E \to E$ *é linear,* $\mathbf{B} \in E$ *e* $\tilde{\mathbf{y}} \in E$ *é uma solução de* $\mathbf{Ly} = \mathbf{B}$*, então a solução geral de* $\mathbf{Ly} = \mathbf{B}$ *é dada por* $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u}$ *onde* $\mathbf{u}$ *é a solução geral da equação homogénea* $\mathbf{Lu} = \mathbf{0}$.

29.2 Equações diferenciais de ordem n

Comecemos com considerações gerais sobre equações de ordem n; nomeadamente sobre a sua relação com sistemas de equações de primeira ordem e a consequente existência e unicidade de soluções.

Uma equação diferencial de ordem n da forma

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

pode ser reduzida a um sistema de equações de primeira ordem: definindo

$$\begin{array}{ll} x_1(t) & = y(t) \\ x_2(t) & = y'(t) \\ x_3(t) & = y''(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n(t) & = y^{(n-1)}(t) \end{array}$$

obtemos

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = x_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1}' & = x_n \\ x_n' & = f(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{cases}$$

Pelo que se pode aplicar o Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema **25.1**). Ou seja, se a função $f(t, x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ é contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziana em relação a $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em D; então dado $(t_0, c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$ em D o seguinte problema de valor inicial

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} y(t_0) & = c_1 \\ y'(t_0) & = c_2 \\ y''(t_0) & = c_3 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) & = c_n \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$ de classe C^n definida numa vizinhança de t_0.

Exemplo 29.2 *A equação de segunda ordem* $y'' = \operatorname{sen} t + (1+y)\,y'$*, com as condições iniciais* $y(0) = 2$ *e* $y'(0) = 3$ *é equivalente ao seguinte sistema de equações de primeira ordem:*

$$\begin{cases} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = \operatorname{sen} t + (1 + x_1)\,x_2 \end{cases} \qquad \textit{com} \quad x_1(0) = 2 \ \textit{e} \ x_2(0) = 3.$$

29.3 Equação linear de ordem n de coeficientes constantes.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + a_{n-2}\,y^{(n-2)} + \cdots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = h(t)$$

onde a_{n-1}, a_{n-2}... a_2, a_1 e a_0 são constantes (escalares; números reais). Mas $h(t)$ é uma função (dada) definida num intervalo real I e $y \equiv y(t)$ é a função procurada (incógnita).

Usando a fórmula da variação das constantes (Teorema 29.1) podemos resolver esta equação se resolvermos a equação homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{H}$$

29.4 Matriz companheira e polinómio característico

Tal com anteriormente, temos (equivalência de (H) a um sistema de equações de 1ª ordem)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Esta última matriz constante $\mathbf{A}$ designa-se por **matriz companheira** da equação linear (H).

Pode-se resolver então a equação (H) calculando a exponencial desta matriz ($\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$). Não seguiremos directamente este caminho, no entanto é útil calcular o polinómio característico desta matriz: $\det(\mathbf{A} - \lambda)$.

Exercício 29.1 $\det(\mathbf{A} - \lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + a_{n-2}\, \lambda^{n-2} + \cdots + a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0\right)$

Este resultado sugere a seguinte definição:

Definição 29.1 *O* ***polinómio característico*** *da equação linear (H) é*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + a_{n-2}\, \lambda^{n-2} + \cdots + a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 \tag{29.1}$$

Determinando as raizes (os zeros) deste polinómio λ_1, $\lambda_2 ... \lambda_j$, e as suas multiplicidades (ordem dos zeros) respectivas m_1, $m_2 ... m_j$, podemos obter a seguinte factorização do polinómio o característico (29.1):

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}\, (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

Onde λ_k é uma raiz de $P(\lambda)$ com multiplicidade m_k e portanto

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_j = n$$

onde n é o grau do polinómio (a ordem da equação).