28 ª Aula 2006.05.08 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

28.1 Exponencial de matrizes formadas por blocos.

Exemplo 28.1 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se reconhece que o que se passa com a primeira e segundas colunas e linhas é independente do que se passa com as duas últimas linhas e colunas, do ponto de vista da multiplicação e soma de matrizes; espaços próprios etc... Diz-se neste caso que a matriz **A** *é formada por blocos sobre a diagonal, sendo estes blocos, neste exemplo, as matrizes* 2×2*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sendo assim podemos usar os dois últimos exemplos para obter imediatamente:

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \operatorname{sen} t & 0 & 0 \\ e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} \end{bmatrix}.$$

De facto quando temos uma matriz **A** quadrada $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ formada pelos blocos $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ sobre a diagonal, onde $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ são matrizes quadradas $n_1 \times n_1$ e $n_2 \times n_2$ respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1} & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbf{B}_2 \\ \vdots & & \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^2} & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbf{B}_2^2 \\ \vdots & & \end{bmatrix} \quad \text{e em geral} \quad \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{B}_1^k} & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \mathbf{B}_2^k \\ \vdots & & \end{bmatrix};$$

portanto

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{e^{t\mathbf{B}_1}} & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & e^{t\mathbf{B}_2} \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Da mesma forma para matrizes formadas por mais blocos sobre a diagonal:

$$\text{Se } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccccc}
\boxed{\mathbf{B}_1} & 0 & \cdots & & \cdots\ 0 & 0 \\
0 & & & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & & \mathbf{B}_2 & & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & & \ddots & 0 \\
\vdots & 0 & & & & \\
0 & \cdots\cdots & \cdots\ 0 & & \mathbf{B}_j & \\
0 & 0 & \cdots\cdots\ 0 & & &
\end{array}\right], \text{ então } \quad e^{t\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccccc}
\boxed{e^{t\mathbf{B}_1}} & 0 & \cdots & & \cdots\ 0 & 0 \\
0 & & & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & & e^{t\mathbf{B}_2} & & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & & \ddots & 0 \\
\vdots & 0 & & & & \\
0 & \cdots\cdots & \cdots\ 0 & & e^{t\mathbf{B}_j} & \\
0 & 0 & \cdots\cdots\ 0 & & &
\end{array}\right]$$

Note-se que alguns deste blocos podem ser unidimensionais (matrizes 1×1); i. e. números.

28.2 Matrizes não diagonalizáveis

Considere–se o seguinte exemplo:

Exemplo 28.2 *Vamos determinar os valores e vectores próprios da matriz:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Pelo que a matriz $\mathbf{A}$ *só tem um valor próprio* $\lambda = 2$. *Calculando os vectores próprios* $\mathbf{v}$ *obtemos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \textit{donde} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde α *é um escalar não nulo arbitrário. Portanto todos os vectores próprios têm a direcção dada pelo vector* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ *pelo que a dimensão do espaço próprio é* 1 *(número máximo de vectores próprios linearmente independentes). Não existindo dois vectores próprios linearmente independentes, concluímos que a matriz* $\mathbf{A}$ *não é diagonalizável.*

Como existem matrizes não diagonalizáveis o procedimento para o cálculo da exponencial de uma matriz que descrevemos anteriormente tem de ser generalizado para estas matrizes. A ideia é ainda utilizar a Proposição **27.1**, mas alargando a classe de matrizes $\mathbf{J}$ para as quais sabemos calcular imediatamente a sua exponencial. Com este objectivo vamos definir uma classe simples de matrizes cuja exponencial seja facilmente apreendida. Esta classe clássica de matrizes que vamos introduzir é designada por formas canónicas de Jordan; são matrizes formadas por blocos sobre a diagonal, sendo cada um destes blocos uma matriz simples designada por bloco de Jordan.

28.3 Blocos de Jordan.

Dá-se o nome de bloco de Jordan de dimensão n a uma matriz J_λ quadrada $n \times n$ da forma:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Portanto bloco de Jordan J_λ de dimensão n é uma matriz quadrada $n \times n$ que tem as entradas da diagonal todas iguais a um certo valor λ (que pode ser nulo), todas as entradas da diagonal superior com o valor 1 e todas as outras entradas nulas. Simbolicamente:

$$J_\lambda = [j_{i,k}]_{i,k=1,\ldots,n} \qquad \text{com} \qquad j_{i,k} = \begin{cases} \lambda & \text{se} \quad i = k \\ 1 & \text{se} \quad i = k-1 \\ 0 & \text{nos} \quad \text{restantes casos} \end{cases}$$

Exemplo 28.3

- $[3]$ *é um bloco de Jordan de dimensão 1 (J_3).*
- $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *é um bloco de Jordan de dimensão 3 (J_4).*
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é um bloco de Jordan de dimensão 2 (J_0).*

28.4 Matrizes na forma canónica de Jordan.

Uma matriz quadrada J é uma matriz na forma canónica de Jordan se é formada exclusivamente por blocos de Jordan sobre a diagonal:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \boxed{J_{\lambda_2}} & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \boxed{J_{\lambda_j}} & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \end{bmatrix}$$

onde J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j} são blocos de Jordan.

Exemplo 28.4

- *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*
- *A matriz* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*
- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*
- *A matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*
- *A matriz* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 2 blocos de Jordan.*
- *A matriz* $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 2 blocos de Jordan.*
- *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *está na forma canónica de Jordan; é formada por 3 blocos de Jordan.*
- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*
- *Mas a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ***não está*** *na forma canónica de Jordan.*

Pode-se mostrar com base exclusivamente em considerações algébricas o seguinte teorema (consultar um livro de álgebra linear para a difícil demonstração deste resultado).

Teorema 28.1 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada qualquer. Então existe uma matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1},$$

onde $\mathbf{J}$ *é uma matriz na forma canónica de Jordan formada por* j *blocos de Jordan* J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j}; j *é a dimensão do espaço próprio (número máximo de vectores próprios linearmente independentes) da matriz* $\mathbf{A}$ *e* λ_1, λ_2 ...λ_j *os seus valores próprios (todos).*

Observação 28.1 *Note-se que* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{J}$ *têm o mesmo polinómio característico. De facto*

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}-\lambda) &= \det\left(\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}-\lambda\right) = \det\left(\mathbf{S}(\mathbf{J}-\lambda)\mathbf{S}^{-1}\right) \\
&= \det \mathbf{S} \det(\mathbf{J}-\lambda) \det \mathbf{S}^{-1} = \det(\mathbf{J}-\lambda) \\
&= (\lambda_1-\lambda)^{n_1}(\lambda_2-\lambda)^{n_2}\dots(\lambda_j-\lambda)^{n_j}
\end{aligned}$$

onde n_1, n_2 ...n_j *são as dimensões dos blocos* J_{λ_1}, J_{λ_2},..., J_{λ_j} *respectivamente. Note-se ainda que se pode ter* $\lambda_a = \lambda_b$ *para índices distintos* $a \neq b$ *e que* $n_1 + n_2 + \cdots + n_j = n$*, sendo* n *a dimensão da matriz* $\mathbf{A}$ *(todas as matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{J}$ *são* $n \times n$*).*

28.5 Exponencial de Blocos de Jordan.

Vamos mostrar em apêndice, que para um bloco de Jordan J_λ de dimensão n temos

$$e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Concretizando para dimensão 4, o que pode ser feito através de um cálculo directo, concluí-se que exponencial de um bloco de Jordan (neste caso de dimensão 4)

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ é dado pela seguinte expressão: } e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 28.5 *Se* J *é a matriz na forma canónica de Jordan*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \textit{ então } e^{tJ} \textit{ é dado por } e^{tJ} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2!}e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

28.6 Exemplos.

Exemplo 28.6 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = \pi \quad \text{e} \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$*.Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) = \det\begin{bmatrix} 3-\boldsymbol{\lambda} & 1 \\ -1 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (3-\boldsymbol{\lambda})(1-\boldsymbol{\lambda}) + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 2)^2.$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[1] $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *A primeira com dois blocos e a segunda com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$*:* $\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$*, facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$*, pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$*. Obtemos* $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$*, ou seja* $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ *e* $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$*. Podemos escolher*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e (uma vez feita esta escolha) } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo que podemos tomar $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Então*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\pi(1+t) + \sqrt{2}t\right)e^{2t} \\ \left(-\pi t + (1-t)\sqrt{2}\right)e^{2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 28.7 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{cases} \quad \text{com} \quad x(0) = y(0) = 0 \quad \text{e} \quad z(0) = 1.$$

---

[1] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) &= \det \begin{bmatrix} 2-\boldsymbol{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 3-\boldsymbol{\lambda} & -1 \\ 0 & 1 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (2-\boldsymbol{\lambda})\left((3-\boldsymbol{\lambda})(1-\boldsymbol{\lambda}) + 1\right) \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = -(\lambda-2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[2] $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, *facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é múltiplo de* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *pelo que apenas temos um vector próprio linearmente independente e portanto só podemos ter um bloco de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. *Obtemos* $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{Av}_3 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ *ou seja*

$$(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Podemos tomar

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$. *Então*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \beta \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Podemos tomar $\alpha = \beta = 0$. *Portanto*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ 0 & t+1 & -t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} t-\frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

[2] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Exemplo 28.8 *Considere-se o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \qquad \textit{com} \quad x(1) = y(1) = 0 \quad e \quad z(1) = 1.$$

A matriz associada a este sistema é $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Calculando os seus valores próprios obtemos*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) &= \det \begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 1 & 1 \\ 0 & 2-\boldsymbol{\lambda} & 0 \\ -1 & 1 & 3-\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = (1-\boldsymbol{\lambda})(2-\boldsymbol{\lambda})(3-\boldsymbol{\lambda}) + 2-\boldsymbol{\lambda} \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})((1-\boldsymbol{\lambda})(3-\boldsymbol{\lambda})+1) = (2-\boldsymbol{\lambda})\left(\boldsymbol{\lambda}^2 - 4\boldsymbol{\lambda} + 4\right) = -(\boldsymbol{\lambda}-2)^3. \end{aligned}$$

De acordo com o teorema de Jordan temos que $\mathbf{A}$ *é semelhante a uma das seguintes formas canónicas*[3] $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2&1&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{bmatrix}$ *ou* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2&1&0 \\ 0&2&1 \\ 0&0&2 \end{bmatrix}$. *A primeira com três blocos, a segunda com dois blocos e a terceira com um bloco de Jordan.*

Calculando os vectores próprios $\mathbf{v}$: $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1&1&1 \\ 0&0&0 \\ -1&1&1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *facilmente concluímos que* $\mathbf{v}$ *é dado por* $\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, *onde* α *e* β *são escalares arbitrários; pelo que apenas temos dois vectores próprios linearmente independentes e portanto só podemos ter dois blocos de Jordan na forma canónica associada, i. e.*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Designe-se então por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$ *as colunas da matriz* $\mathbf{S}$ *(com* $\det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$*) tal que* $\mathbf{AS} = \mathbf{SJ}$. *Obtemos* $\mathbf{Av}_1 = 2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{Av}_3 = 2\mathbf{v}_3$, *ou seja*

$$(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad e \quad (\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Para que $(\mathbf{A} - 2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ *possa ter solução, o vector* $\mathbf{v}_1$ *tem de pertencer ao espaço das colunas da matriz* $\mathbf{A} - 2$; *concluímos que* $\mathbf{v}_1$ *tem de ser múltiplo do vector* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Tomemos*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e uma vez feita esta escolha vem $\begin{bmatrix} -1&1&1 \\ 0&0&0 \\ -1&1&1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Uma solução possível é*

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim $\mathbf{v}_3$ *tem de ser um vector próprio de* $\mathbf{A}$ *linearmente independente do vector próprio* $\mathbf{v}_1$, *pelo que podemos tomar*

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[3] A primeira das hipóteses pode ser facilmente eliminada notando que nesse caso $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{J}$, o que visivelmente não acontece.

Então
$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1&0&1\\0&1&1\\1&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&t&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1 \end{bmatrix}$$
$$= e^{2t} \begin{bmatrix} 1&t&1\\0&1&1\\1&t&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t&t&t\\0&1&0\\-t&t&1+t \end{bmatrix}.$$

Pelo que
$$\begin{bmatrix} x(t)\\y(t)\\z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{(t-1)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} = e^{2(t-1)} \begin{bmatrix} 2-t&t-1&t-1\\0&1&0\\1-t&t-1&t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t-1)\,e^{2(t-1)}\\0\\te^{2(t-1)} \end{bmatrix}$$

Observação 28.2 *Note-se que na resolução de um problema linear homogéneo* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$*, podemos portanto calcular uma matriz* $\mathbf{J}$ *na forma canónica de Jordan semelhante a* $\mathbf{A}$*, ou seja* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$*, e obter a solução geral*
$$\mathbf{y} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{c},$$
sem ter de calcular a matriz $\mathbf{S}^{-1}$*, porque* $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(0)$ *é um vector constante. A matriz* $\mathbf{M}(t) \equiv \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}$ *é uma* ***matriz fundamental*** *da equação* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$*, porque satisfaz as propriedades* $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ *e* $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$ [4]*.*

Exercício 28.1 *Sendo* $\mathbf{A}$ *uma matriz constante, mostre que se* $\mathbf{M}(t)$ *é uma* ***matriz fundamental*** *da equação* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ *(ou seja* $\mathbf{M}(t)$ *é uma função matricial tal que* $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$ *e* $\det \mathbf{M}(t) \neq 0$*), então*
$$\mathbf{M}(t)\,\mathbf{M}^{-1}(s) = e^{(t-s)\mathbf{A}}.$$

28.7 Apêndice. Exponencial de Blocos de Jordan.

Vamos mostrar que para um bloco de Jordan J_λ de dimensão n a sua exponencial tem a seguinte expressão
$$e^{J_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Considere-se a matriz $\mathbf{G}(1)$ definida por $J_\lambda = \lambda\mathbf{Id} + \mathbf{G}(1)$, portanto
$$\mathbf{G}(1) = \begin{bmatrix} \lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\ddots&\vdots\\0&0&\lambda&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0&\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&\cdots&0\\0&\lambda&0&\ddots&\vdots\\0&0&\lambda&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0&0 \end{bmatrix}$$

[4] De facto
$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{S}e^{t\mathbf{J}} = \frac{d}{dt}\mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{M}(t)$$
e
$$\det \mathbf{M}(t) = \det e^{t\mathbf{A}}\mathbf{S} = \det e^{t\mathbf{A}} \det \mathbf{S} \neq \mathbf{0}.$$

e em geral, para $1 \leqslant j$, as matrizes $\mathbf{G}(j)$, (matrizes quadradas $n \times n$ em que as únicas entradas não nulas são uns sobre a j- ésima diagonal superior), definidas por

$$\mathbf{G}(j) = [g_{i,k}(j)]_{i,k=1,\dots,n} \qquad \text{com} \qquad g_{i,k}(j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = k - j \\ 0 & \text{nos} \quad \text{restantes casos} \end{cases}.$$

Em particular $\mathbf{G}(j) = \mathbf{0}$ se $j \geqslant n$. Comecemos por mostrar que (para $1 \leqslant j$)

$$(\mathbf{G}(1))^j = \mathbf{G}(j) \tag{28.1}$$

Obviamente que esta relação está correcta para $j = 1$. Se por hipótese de indução é verdadeira para certo j inteiro, temos que $(\mathbf{G}(1))^{j+1} = \mathbf{G}(j)\,\mathbf{G}(1)$. Pelo que falta provar que $\mathbf{G}(j+1) = \mathbf{G}(j)\,\mathbf{G}(1)$. Verifiquemos então que de facto

$$g_{i,k}(j+1) = \sum_{s=1}^{n} g_{i,s}(j)\, g_{s,k}(1).$$

Ora $g_{i,s}(j)\, g_{s,k}(1)$ é diferente de zero apenas quando $i = s - j$ e $s = k - 1$; portanto $g_{i,k}(j+1)$ é diferente de zero só quando $i = k - (j+1)$ e neste caso $g_{i,k}(j+1) = 1$.

Uma vez demonstrada a relação (28.1), obtemos (onde $\mathbf{G}(0) = \mathbf{Id}$)

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{G}(1)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\mathbf{G}(k). \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Corolário **26.2**, obtemos

$$e^{tJ_\lambda} = e^{\lambda t\mathbf{Id} + t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t\mathbf{Id}} e^{t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t}\mathbf{Id} e^{t\mathbf{G}(1)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$