(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

27.1 Exponencial de matrizes semelhantes

Proposição 27.1 *Se* $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$ *onde* $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{J}$ *são matrizes* $n \times n$ [1], *(com* $\det \mathbf{S} \neq 0$*), então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{J}\mathbf{S}^{-1}$$

Demonstração. *Temos* $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$, *donde*

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{SJS}^{-1}\mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{SJ}^2\mathbf{S}^{-1} \quad ; \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{SJ}^2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{SJS}^{-1} = \mathbf{SJ}^3\mathbf{S}^{-1} \quad \ldots$$

e por indução

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{J}^k\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{J}\mathbf{S}^{-1}$$

■

27.2 Exponencial de matrizes diagonalizáveis

Sabemos da Álgebra Linear que muitas matrizes são diagonalizáveis; ou seja é frequente a situação em que dada uma matriz $\mathbf{A}$ é possível calcular uma matriz mudança de base $\mathbf{S}$ e uma matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ tais que $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$. Pela Proposição 27.1, podemos então calcular a matriz $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ desde que saibamos calcular $\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}$. Mas como vamos ver de seguida, é trivial o cálculo da exponencial de uma matriz diagonal.

Considere-se uma matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por simples verificação, obtemos que o seu quadrado é ainda uma matriz diagonal em que as entradas são o quadrado das da matriz inicial:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

[1] Ou dito com outra terminologia: se as matrizes A e B são semelhantes.

Por indução concluímos que a potência k de uma matriz diagonal se obtém de forma semelhante:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

E de acordo com a definição de exponencial de uma matiz obtemos:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

ou seja, a exponencial de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal em que as entradas (na diagonal) são as exponenciais das entradas correspondentes na matriz original.

Portanto, o cálculo da exponencial de uma matriz diagonalizável $\mathbf{A}$ reduz-se à determinação da matriz diagonal semelhante $\mathbf{\Lambda}$ (cálculo de valores próprios) e da respectiva matriz mudança de base $\mathbf{S}$ (cálculo de vectores próprios). Após a inversão da matriz $\mathbf{S}$, obtemos a exponencial da matriz $\mathbf{A}$ por simples multiplicação de matrizes: $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}= \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1}$.

Notação 27.1 *Se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz quadrada e* λ *um escalar, escrevemos* $\mathbf{A}-\lambda$ *em vez de (com o mesmo significado de)* $\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{Id}$*, onde* $\mathbf{Id}$ *representa a matriz identidade.*
Por exemplo $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Recorde-se da Álgebra Linear que se $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$, então $\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda}$ e se v é uma coluna de $\mathbf{S}$ então satisfaz a relação $\mathbf{A}v = \lambda v$, onde λ é a entrada correspondente (à coluna considerada) da matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$. Uma vez que a matriz $\mathbf{S}$ é invertível concluímos que as colunas $\mathbf{S}$ são vectores próprios linearmente independentes da matriz $\mathbf{A}$. Portanto, $\mathbf{A}$ é matriz $n \times n$ diagonalizável sse possui n vectores próprios linearmente independentes. Por outro lado um par (λ, v) - λ escalar; v vector não nulo - satisfaz a relação $\mathbf{A}v = \lambda v$ sse $(\mathbf{A}-\lambda)\,v = 0$. Como v não pode ser o vector nulo, esta igualdade só pode ser satisfeita se

$$\det(\mathbf{A}-\lambda) = 0.$$

É esta última igualdade que permite o cálculos dos valores próprios de $\mathbf{A}$. Por fim, dado um valor próprio λ podemos calcular uma vector próprio correspondente resolvendo os sistema degenerado $(\mathbf{A}-\lambda)\,v = 0$.

27.3 Exemplos com matrizes diagonalizáveis

27.3.1 Exemplo-valores próprios reais

Exemplo 27.1 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinação dos valores próprios:

$$\mathbf{A}-\lambda=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\quad e\quad \det\left(\mathbf{A}-\lambda\right)=(3-\lambda)^2-1.$$

Valores próprios $\lambda=3\pm1$ *(*$\lambda=2$ *ou* $\lambda=4$*)* . *Concluímos* $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ *com* $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.
As colunas de $\mathbf{S}$ *são vectores próprios de* $\mathbf{A}$.
Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda=2$*:*

$$\mathbf{A}v=\lambda v\quad ou\ seja\quad \mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\quad ou\ ainda\quad (\mathbf{A}-\lambda)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0.$$

portanto

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad donde\quad x+y=0.$$

Só precisamos de um vector próprio; por exemplo $x=1$, $y=-1$*:* $v=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.
Vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda=4$*:*

$$(\mathbf{A}-4)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad ou\ seja\quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=0\quad donde\quad x-y=0.$$

Por exemplo $v=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. *Determinamos então uma matriz* $\mathbf{S}$ *que satisfaz* $\mathbf{AS}=\mathbf{S\Lambda}$*:*

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

e, invertendo esta matriz $\mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. *Agora podemos calcular* $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$*:*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}&=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{e}^{t\mathbf{\Lambda}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2}\\ \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

27.3.2 Exemplo-valores próprios complexos conjugados

Exemplo 27.2 *Considere-se a matriz*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Determinação dos valores próprios:

$$\det\left(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}\right)=0\Leftrightarrow\det\begin{bmatrix}1-\boldsymbol{\lambda} & -1\\ 1 & 1-\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\boldsymbol{\lambda})^2+1=0$$

Valores próprios $\boldsymbol{\lambda} = 1 \pm i$ *(*$\lambda = 1 + i$ *ou* $\lambda = 1 - i$*)* . *Concluímos* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ *com*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

As colunas de $\mathbf{S}$ *são vectores próprios de* $\mathbf{A}$.

Vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda = 1 \pm i$*:*

$$\mathbf{A}v = \lambda v \quad \textit{ou seja} \quad (\mathbf{A} - \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \textit{ou ainda}$$

$$\begin{bmatrix} 1-(1\pm i) & -1 \\ 1 & 1-(1\pm i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \textit{donde} \quad \mp ix - y = 0.$$

Só precisamos de um vector próprio para cada valor próprio: por exemplo $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ *associado ao valor próprio* $\lambda = 1 + i$ *e* $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ *associado ao valor próprio* $\lambda = 1 - i$. *Determinamos então uma matriz* $\mathbf{S}$ *que satisfaz* $\mathbf{AS} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}$*:*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

e, invertendo esta matriz $\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$. *Agora podemos calcular* $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \mathbf{e}^{t\boldsymbol{\Lambda}} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & ie^{it} \\ e^{-it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} & i\dfrac{e^{it} - ie^{-it}}{2} \\ -i\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2} & \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

27.4 Critérios para a verificação dos cálculos

Sendo o cálculo de exponenciais de matrizes muitas vezes intricado, convém ter critérios simples de verificação dos resultado. Dois critérios que são muito úteis na prática são os que expressos nas seguintes igualdades:

$$\left[\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\right]_{t=0} = \mathbf{Id} \quad \text{e} \quad \left[\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\right]_{t=0} = \mathbf{A}.$$

Por outro lado sempre que se calcula a inversa $\mathbf{S}^{-1}$ de uma matriz $\mathbf{S}$, convém verificar imediatamente que o resultado obtido é correcto através da igualdade $\mathbf{SS}^{-1} = \mathbf{Id}$.