26 ª Aula 2006.05.03 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

26.1 Soluções do sistema homogéneo

Teorema 26.1 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz* $n \times n$ *(constante),* $\mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^n$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Então o seguinte problema de valor inicial*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \textit{com} \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$$

tem uma única solução $\mathbf{y}(t)$ *definida para todo* $t \in \mathbb{R}$ *que pode ser calculada pela fórmula*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{y_0}.$$

Demonstração. *De acordo com o Teorema **25.3** e o Corolário **25.4** temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) - \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{y}(t)\right) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{-(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{(\mathbf{t}-\mathbf{t_0})\mathbf{A}}\mathbf{y}(t_0)
\end{aligned}$$

■

Observação 26.1 *O Teorema 26.1 (e a sua demonstração) mantém-se inalterado se substituirmos* $\mathbf{y_0} \in \mathbb{R}^n$ *por* $\mathbf{y_0} \in \mathbb{C}^n$. *Obtendo-se portanto, uma única solução* $\mathbf{y}(t)$ *com valores em* $\mathbb{C}^n$ *definida para todo o* $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 26.1 *Considere-se o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad \textit{com} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \textit{com} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*De acordo com o Teorema anterior e com o exemplo **26.3** a solução é dada por*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & \dfrac{1}{2}\left(e^{2(t-t_0)} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_0 e^{2(t-t_0)} + \dfrac{y_0}{2}\left(e^{2(t-t_0)} - 1\right) \\ y_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou seja

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{y_0}{2}\right) e^{2(t-t_0)} - \frac{y_0}{2} \quad e \quad y(t) = y_0$$

Corolário 26.2 *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes* $n \times n$ *tais que* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. *Então*

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{e}^{\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}.$$

Demonstração. *Comecemos por notar que da definição de* $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ *e de* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *se obtem* $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$. *Dado* $\mathbf{v}$ *um vector qualquer de dimensão* n *e defina-se* $\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v}$ *e* $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\mathbf{v}$. *Então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} + \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{y}, \end{aligned}$$

tal como

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\tilde{\mathbf{y}}.$$

Uma vez que $\mathbf{y}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{v}$, *pela unicidade de solução vem*

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{v} = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\mathbf{v},$$

como esta igualdade é verificada para todo o vector $\mathbf{v}$, *obtemos a igualdade matricial*

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}.$$

■

Corolário 26.3 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz* $n \times n$. *Para quaisquer reais* t *e* s *tem-se*

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{s\mathbf{A}} = \mathbf{e}^{(t+s)\mathbf{A}}.$$

Demonstração. *Basta aplicar o Corolário 26.2 para as matrizes* $t\mathbf{A}$ *e* $s\mathbf{A}$. ■

Teorema 26.4 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz* $n \times n$ *(constante). Então as soluções da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

constituem um espaço linear de dimensão n.

Demonstração. *Sejam* $\mathbf{y}_1$ *e* $\mathbf{y}_2$ *duas soluções da equação e* α_1 *e* α_2 *dois escalares; então* $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ *é ainda uma solução da mesma equação, de facto*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y} &= \alpha_1\frac{d}{dt}\mathbf{y}_1 + \alpha_2\frac{d}{dt}\mathbf{y}_2 \\ &= \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{y}_2 \\ &= \mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Pelo que as soluções constituem um subespaço linear (do espaço das funções definidas em $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$). Para concluirmos que a dimensão deste subespaço é n basta verificar que para quaisquer soluções $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2 ... \mathbf{y}_j$ e para quaisquer escalares α_1, $\alpha_2 ... \alpha_j$, temos de acordo com o Teorema 26.1 que

$$\mathbf{e}^{-t\mathbf{A}} \left(\alpha_1 \mathbf{y}_1 (t) + \alpha_2 \mathbf{y}_2 (t) + \cdots + \alpha_j \mathbf{y}_j (t)\right) = \alpha_1 \mathbf{y}_1 (0) + \alpha_2 \mathbf{y}_2 (0) + \cdots + \alpha_j \mathbf{y}_j (0) .$$

Portanto as soluções $\mathbf{y}_1 (t)$, $\mathbf{y}_2 (t) ... \mathbf{y}_j (t)$ são linearmente independentes sse os vectores (de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) $\mathbf{y}_1 (0)$, $\mathbf{y}_2 (0) ... \mathbf{y}_j (0)$ também o forem. ■

26.2 Soluções dadas por vectores e valores próprios

Proposição 26.5 *Um vector $\mathbf{v}$ é um vector próprio da matriz quadrada $\mathbf{A}$ correspondente ao valor próprio λ sse $\mathbf{y}(t) = e^{t\lambda}\mathbf{v}$ é uma solução não trivial de $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$.*

Demonstração. *Basta notar que*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t\lambda}\mathbf{v}\right) = \mathbf{A}\left(e^{t\lambda}\mathbf{v}\right) \Leftrightarrow \lambda e^{t\lambda}\mathbf{v} = e^{t\lambda}\mathbf{A}\mathbf{v} \Leftrightarrow \lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

■

Proposição 26.6 *Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ de* ***entradas reais****. Então $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ é uma solução de $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ sse $\mathbf{u}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{v}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{y}(t)$ são soluções reais da mesma equação.*

Demonstração. *Se $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ é tal que $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ então fazendo o complexo conjugado obtemos $\frac{d}{dt}\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{y}}$ uma vez que $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Somando as relações anteriores e multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtemos*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} + \frac{d}{dt}\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}\overline{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{A}\frac{1}{2}\left(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{y}}\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

Do modo análogo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} - \frac{d}{dt}\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2i}\left(\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{A}\frac{1}{2i}\left(\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v},$$

o que prova a condição suficiente.

Por outro lado se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad e \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

então

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} + i\frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} + i\mathbf{A}\mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u} + i\mathbf{v}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{u} + i\mathbf{v}\right)$$

o que prova a condição necessária. ■

Exemplo 26.2 *Considere-se o seguinte sistema de equações:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i. e.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad com \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para de acordo com a Proposição 26.5 determinarmos uma solução deste sistema, vamos calcular os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \pm i \end{aligned}$$

Determinemos um vector próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = 1 + i$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (1+i)\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Leftrightarrow X - Y = (1+i)\,X \Leftrightarrow Y = -iX$$

Por exemplo $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. *Então* $\mathbf{y} = e^{(i+1)t}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ *é solução do sistema. Ou seja*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) \\ e^t(\mathrm{sen}\,t - i\cos t) \end{bmatrix}$$

De acordo com a Proposição 26.6

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos t \\ e^t\,\mathrm{sen}\,t \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} e^t\,\mathrm{sen}\,t \\ -e^t\cos t \end{bmatrix}$$

são soluções (reais) do sistema. Então de acordo com o Teorema 26.4 temos que a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t\begin{bmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix} + c_2 e^t\begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Mas de acordo com o Teorema 26.1 também é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Comparando estas expressões, primeiro com $t = 0$ *e depois com* t *qualquer, concluímos que* $c_1 = x_0$; $c_2 = -y_0$ *e depois que*

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = e^t\begin{bmatrix} \cos t & -\mathrm{sen}\,t \\ \mathrm{sen}\,t & \cos t \end{bmatrix}$$