25 ª Aula 2006.04.28 $\boxed{\textbf{AMIV}_{\text{LEC}}}$ Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

25.1 Sistemas de equações diferenciais

25.1.1 Definição

Considere-se $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, contínua no conjunto aberto D

Vamos considerar a seguinte equação diferencial ordinária vectorial de 1ª ordem:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

(onde a incógnita y é uma função de variável real - i. e. em $\mathbb{R}$ - com valores em $\mathbb{R}^n$).

Uma vez que f tem n funções coordenadas f_1, f_2, ... f_n - funções de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ - tal como y tem n funções coordenadas y_1, y_2, ... y_n - funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ -a equação acima é um **sistema de equações diferenciais**:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Uma condição inicial $y(t_0) = y_0$ é um conjunto de n condições:

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{01} \\ y_2(t_0) &= y_{02} \\ \vdots\ &\quad \vdots \\ y_n(t_0) &= y_{0n} \end{aligned}$$

Exemplo 25.1 *O seguinte sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 + x \operatorname{sen} z + y \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y \cos t \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - 2e^{t^2} \end{cases} \qquad \textit{com as condições iniciais} \quad x(1) = 0,\ y(1) = 0 \ \textit{e}\ z(1) = \pi$$

pode ser escrito na forma $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(t, \mathbf{y})$ *com a condição* $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, *onde*

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

e $f(t, \mathbf{y}) = f(t, x, y, z) = \left(y^2 + x \operatorname{sen} z + y \operatorname{sen} t, \quad x^2 + y \cos t, \quad xy - 2e^{t^2}\right)$

25.1.2 Teorema de Picard-Lindelöf

O enunciado e a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf ficam formalmente inalterados (substitui-se apenas o módulo pela norma em $\mathbb{R}^n$ e considera-se y com valores em $\mathbb{R}^n$) quando se consideram equações vectoriais generalizando as equações escalares.

Teorema 25.1 (Teorema de Picard-Lindelöf) *Seja* $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *e* $(t_0, y_0) \in D$ *, tais que*

a) f *é contínua em* D

b) $f(t, y)$ *é localmente lipschitziana em relação a* y *em* D.

I. e. , para cada ponto $(t, y) \in D$ *existe uma vizinhança* V *de* (t, y) *e* $L > 0$ *tal que para quaisquer pontos* (t, y_1) *e* (t, y_2) *pertencentes*[1] *a* D

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant L \|y_1 - y_2\| .$$

Então o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y(t)$ *(de classe* C^1*) definida numa vizinhança de* t_0.

25.2 Sistemas lineares escritos na forma matricial

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante (não depende de t) e $\mathbf{B}(t)$ é um a função com valores em $\mathbb{R}^n$ (ou seja, na nossa notação, com valores nas matrizes $n \times 1$). Se $\mathbf{B}(t) \equiv 0$, diz-se que a equação é homogénea .

Exemplo 25.2 *Considere-se o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z - 2e^t \end{cases}$$

com as condições iniciais $x(0) = y(0) = z(0) = 1$*. (Facilmente se obtém, por integração sucessiva, que* $x(t) = y(t) = z(t) = e^t$*). Este sistema pode ser escrito na seguinte forma matricial* $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)$*:*

[1] Note-e que (t, y_1) e (t, y_2) têm a mesma primeira coordenada.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e^t \\ -2e^t \end{bmatrix}.$$

A equação homogénea associada é $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ *correspondendo ao sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}.$$

No que se segue iremos primeiramente considerar sistemas homogéneos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ constante.
A solução geral no caso $n = 1$, é

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}.$$

Vamos ver que esta expressão continua a fazer sentido no caso $n \neq 1$.

25.3 Exponencial de matrizes

25.3.1 Definição de exponencial

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada, então e exponencial desta matriz é definida por.

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{Id} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

25.3.2 Convergência da série que define a exponencial

Pode-se mostrar $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ existe qualquer que seja a matriz $\mathbf{A}$. Ou seja que para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$ o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

existe[2]. Ou seja existe o limite de cada uma das entradas da matriz $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$.

[2] De facto se M for um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}$, então $M^k n^{k-1}$ é um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}^k$ ($k \geqslant 1$), onde n é a dimensão da matriz $\mathbf{A}$. Então $M^k n^k$ é um majorante do módulo das entradas da matriz $\mathbf{A}^k$ ($k \geqslant 0$) e e^{Mn} é um majorante do módulo das entradas da matriz $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$. Pelo que as séries que definem cada uma das entradas de $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ são absolutamente convergentes.

25.3.3 Exemplo

Exemplo 25.3 *Considere-se a matiz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e por indução mostra-se que*

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{para } k \geqslant 1.$$

Então, de acordo com a definição de exponencial de uma matriz, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}2^k & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}2^k & \displaystyle\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}2^k - 1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^2 & \displaystyle\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, com $t \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} & \displaystyle\frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

25.4 Funções matriciais

25.4.1 Definições

Vamos trabalhar com matrizes $\mathbf{A}$ em que cada uma das suas entradas $[a_{ij}]$ é uma função de variável real. Dizemos funções matriciais de variável real.

Se as entradas da matriz $\mathbf{A}$ são $[a_{ij}]$, então as entradas de $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ são $\left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$; as entradas de $\int \mathbf{A}dt$ são $\left[\int a_{ij}dt\right]$; as entradas de $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{A}dt$ são $\left[\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} a_{ij}dt\right]$. A matriz $\mathbf{A}$ diz-se contínua (diferenciável; integrável; primitivável; etc...) se as suas entradas $[a_{ij}]$ forem todas elas funções contínuas (diferenciáveis; integráveis; primitiváveis; etc...).

25.4.2 Propriedades

Proposição 25.2 *Se* $\mathbf{C}$ *é uma matriz* $m \times p$ *e* $\mathbf{D}$ *é uma matriz* $p \times n$*, então*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CD}) = \frac{d\mathbf{C}}{dt}\mathbf{D} + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{CD})\right)_{ij} &= \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{p}(\mathbf{C})_{ik}(\mathbf{D})_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{d(\mathbf{C})_{ik}}{dt}(\mathbf{D})_{kj} + (\mathbf{C})_{ik}\frac{d(\mathbf{D})_{kj}}{dt}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p}\frac{d(\mathbf{C})_{ik}}{dt}(\mathbf{D})_{kj} + \sum_{k=1}^{p}(\mathbf{C})_{ik}\frac{d(\mathbf{D})_{kj}}{dt} \\
&= \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt}\mathbf{D}\right)_{ij} + \left(\mathbf{C}\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)_{ij}
\end{aligned}$$

■

25.5 Derivada de uma exponencial

Teorema 25.3 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada* ***constante****. Então a função matricial* $\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ *satisfaz as seguintes propriedades*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) = \mathbf{AE}(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} \quad e \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{Id}$$

onde $\mathbf{Id}$ *representa matriz identidade.*

Demonstração. *Cada uma das entradas da matriz $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ é uma série de potências (convergente para todo o t) que pode portanto ser derivada termo a termo. Temos então*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{kt^{k-1}}{k!}\mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathbf{A}^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^{k+1}\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^{k+1} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^{k+1} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k\right) \\ &= \mathbf{E}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}(t).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{Id} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \cdots$$

Pelo que $\mathbf{E}(0) = \mathbf{Id}$. ■

Observação 25.1 *Com essencialmente a mesma demonstração temos*

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{E}}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(t)\mathbf{A} \quad e \quad \tilde{\mathbf{E}}(t_0) = \mathbf{Id}$$

se $\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}$.

Corolário 25.4 $\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}}$

Demonstração. *Considere a função matricial*

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}.$$

Temos de acordo com os resultados precedentes:_

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{D}(t) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\right)\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} + \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\right) \\ &= -\mathbf{A}\mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} + \mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto todas as entradas desta matriz são funções constantes porque as suas derivadas são nulas, ou seja a matriz $\mathbf{D}(t)$ é constante. Então

$$\mathbf{e}^{-t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}(0) = \mathbf{Id}$$

■