24 ^{a} Aula 2006.04.26 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

24.1 Lema de Gronwall

Para terminar a demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf, falta agora provar que a solução que determinamos é única. Para conseguir este objectivo necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 24.1 (Lema de Gronwall) *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, L um real positivo, $t_0 \in I$ e $u(t)$ uma função tal que:*

a) *u é contínua em I.*

b) $\forall t \in I, \quad u(t) \geqslant 0.$

c) $\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \right|.$

Então $\forall t \in I, \quad u(t) = 0.$

Demonstração. Seja $U(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds.$

1) Para $t \geqslant t_0$ temos $U(t) \geqslant 0$ e a condição c) escreve-se $\dfrac{dU}{dt} = u \leqslant L\,U.$

Donde $\dfrac{dU}{dt} e^{-L(t-t_0)} - L\,U e^{-L(t-t_0)} \leqslant 0$ ou seja $\dfrac{d}{dt}\left(U e^{-L(t-t_0)}\right) \leqslant 0.$Integrando esta relação entre t_0 e t obtemos $U(t)\, e^{-L(t-t_0)} - U(t_0) \leqslant 0$ e como $U(t_0) = 0$ vem $U(t) \leqslant 0.$

Pelo que, para $t \geqslant t_0$, obtemos $U(t) = 0.$

2) De modo análogo para $t \leqslant t_0$ temos $U(t) \leqslant 0$ e a condição c) escreve-se $\dfrac{dU}{dt} = u \leqslant -L\,U.$

Donde $\frac{dU}{dt} e^{L(t-t_0)} + L\,U e^{L(t-t_0)} \leqslant 0$, ou seja $\dfrac{d}{dt}\left(U e^{L(t-t_0)}\right) \leqslant 0$. Integrando esta relação entre t e t_0 $(t \leqslant t_0)$ obtemos $U(t_0) - U(t)\, e^{L(t-t_0)} \leqslant 0$, e como $U(t_0) = 0$, vem $U(t) \geqslant 0.$

Pelo que, para $t \leqslant t_0$, obtemos ainda $U(t) = 0.$

3) Finalmente, como a função $U(t)$ é constante a sua derivada $u(t)$ é a função nula. ■

24.2 Demonstração da unicidade no Teorema 23.1

Se $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ são soluções do problema (**23.1**) num certo intervalo I e portanto soluções de (**23.2**) podemos pôr

$$y(t) - \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{y}(s))\ ds$$

pelo que, usando a hipótese de $f(t,y)$ ser localmente lipschitziana em relação a y em D, obtém-se

$$\begin{aligned}|y(t)-\tilde{y}(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))-f(s,\tilde{y}(s))\ ds\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,y(s))-f(s,\tilde{y}(s))|\ ds \\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t} |y(s)-\tilde{y}(s)|\ ds.\end{aligned}$$

Então a função $u(t)=|y(t)-\tilde{y}(t)|$ satisfaz as condições do Lema de Gronwall concluindo-se $y(t)=\tilde{y}(t)$ (para qualquer t suficientemente próximo de t_0 - para se poder usar sempre a mesma vizinhança onde $f(t,y)$ é lipschitziana); ou seja: numa vizinhança de t_0 só existe uma solução do problema (**23.1**).

24.3 Prolongamento de soluções

O seguinte teorema precisa o conceito de **intervalo máximo de definição** que já utilizamos anteriormente de uma forma intuitiva. Afirma que a solução pode ser prolongada enquanto não sair do domínio D aonde as condições do Teorema de Picard-Lindelöf são satisfeitas. Em particular quando $D=\mathbb{R}^2$, as soluções podem ser prolongadas até que expludam (i. e. até que a solução ou a sua derivada deixem de ser limitadas).

Teorema 24.2 *Seja $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f:D\to\mathbb{R}$, tal que*

a) *f é contínua em D*

b) *$f(t,y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D.*

Seja ainda (pelo Teorema de Picard-Lindelöf) $y(t)$ tal para certo intervalo aberto[1] I, se tenha

$$\forall t\in I \qquad \frac{dy}{dt}(t)=f(t,y(t)).$$

*Então existe um **intervalo máximo de definição** $]a,b[\ \supset I$, tal que $y(t)$ admite um prolongamento a este intervalo de tal forma que*

$$\forall t\in\ ]a,b[\qquad \frac{dy}{dt}(t)=f(t,y(t))$$

e verifica-se obrigatoriamente pelo menos uma das seguintes propriedades caracterizando o ponto b (respectivamente, o ponto a):

i) *$b=+\infty$ (resp. $a=-\infty$).*

ii) *$y(t)$ não é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b (resp. à direita do ponto a).*

iii) *$\frac{dy}{dt}(t)$ não é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b (resp. à direita de a).*

iv) *$\lim_{t\to b^-} y(t)\equiv\beta$ existe em $\mathbb{R}$, mas $(b,\beta)\in\partial D$ (resp. $\lim_{t\to a^+} y(t)\equiv\alpha\in\mathbb{R}$ e $(a,\alpha)\in\partial D$)[2].*

[1] Obviamente que o intervalo aberto I tem ser tal que $\{(t,y(t)) : t\in I\}\subset D$.

[2] Onde ∂D designa a fronteira de D; como D é aberto, está-se a afirmar que $(b,\beta)\notin D$ (resp. $(a,\alpha)\notin D$).

24.4 Comparação de soluções

Apesar de muitas vezes não ser possível determinar exactamente e explicitamente as soluções de certas equações diferenciais é muitas vezes possível uma análise rigorosa comparando as soluções desconhecidas com soluções de equações diferenciais que sabemos resolver explicitamente.

Exemplo 24.1 *Considere-se o PVI:* $\dfrac{dy}{dt} = t^2 + y^2 \quad com \quad y(1) = 0.$

Temos, para $t > 1$, $\dfrac{dy}{dt} \geqslant y^2 + 1$, *ou seja* $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dt} \geqslant 1$. *E, se* $t > 1$, *vem* $\operatorname{arctg} y(t) - \operatorname{arctg} 0 \geqslant t - 1$ *e ainda* $y(t) \geqslant \operatorname{tg}(t-1)$. *Como* $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}+1} \operatorname{tg}(t-1) = +\infty$, *concluímos que existe* $t_1 \in \left]1, \frac{\pi}{2}+1\right]$ *tal que* $\lim\limits_{t \to t_1} y(t) = +\infty$,*i.e. a solução* $y(t)$ *do problema de valor inicial considerado explode*[3].

Para sistematizar este tipo de raciocínios vamos enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 24.3 *Sejam* $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *um conjunto aberto e as funções* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $g : D \to \mathbb{R}$, *contínuas em* D *e tais que pelo menos uma delas é localmente lipschitziana em relação a* y *em* D. *Suponha-se ainda que (para* $(t,y) \in D$*)* $\qquad f(t,y) \leqslant g(t,y)$.

Dados (t_0, u_0) *e* (t_0, v_0) *tais que* $(t_0,u_0) \in D$, $(t_0,v_0) \in D$ *e* $\qquad u_0 \leqslant v_0$,

considerem-se $u(t)$ *e* $v(t)$ *soluções dos seguinte problemas*

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \quad com \quad u(t_0) = u_0 \qquad \textbf{e} \qquad \frac{dv}{dt} = g(t,v) \quad com \quad v(t_0) = v_0$$

respectivamente, ambas definidas no intervalo $[t_0, b[$ *com* $b > t_0$. *Então:*

$$\forall t \in [t_0, b[\qquad u(t) \leqslant v(t).$$

Demonstração. *Considere-se por absurdo que para certos*[4] t_1 *e* t_2 *tais que* $t_1, t_2 \in [t_0, b[$, $t_1 < t_2$ *se tem*

$$u(t_1) = v(t_1) \quad e \quad u(t) > v(t) \qquad para\ t \in]t_1, t_2[.$$

Vamos supor que é a função g *que é localmente lipschitziana em relação a* y *em* D *(a demonstração, no caso de ser* f *a função que é localmente lipschitziana, é análoga). Então existe uma vizinhança* V *do ponto* $(t_1, v(t_1))$ *tal que para quaisquer* $(t, y_1), (t, y_2) \in V$ *se tem*

$$|g(t,y_1) - g(s,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|.$$

Usando a continuidade das soluções, seja $\tilde{t}_2 \in\ ]t_1, t_2[$ *tal que para* $t \in \left]t_1, \tilde{t}_2\right[$ *se tenha* $(t, u(t)) \in V$ *e* $(t, v(t)) \in V$. *Então para* $t \in \left]t_1, \tilde{t}_2\right[$ *temos*[5]

---

[3] Podemos conluir com um raciocínio semelhante, que todas as soluções da equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} = t^2 + y^2$ explodem.

[4] Mais rigorosamente $t_1 = \inf\{t > t_0 : u(t) > v(t)\}$ e $t_2 = \inf(\{t > t_1 : u(t) \leqslant v(t)\} \cup \{b\})$.

[5] No caso de ser f a função que é localmente lipschitziana usamos de forma análoga:

$$u(t) - v(t) = \int_{t_1}^{t} (f(s,u(s)) - g(s,v(s)))\, ds \leqslant \int_{t_1}^{t} (f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\, ds.$$

$$\begin{aligned}
u(t)-v(t) &= u(t_1)+\int_{t_1}^{t} f(s,u(s))\ ds - v(t_1) - \int_{t_1}^{t} g(s,v(s))\ ds \\
&= \int_{t_1}^{t} \left(f(s,u(s)) - g(s,v(s))\right)\ ds \leqslant \int_{t_1}^{t} \left(g(s,u(s)) - g(s,v(s))\right)\ ds \\
&\leqslant L\int_{t_1}^{t} \left(u(s)-v(s)\right)\ ds
\end{aligned}$$

Então pelo Lema de Gronwall concluímos que $u(t)-v(t)=0$ *para todo* $t\in\left]t_1,\tilde{t}_2\right[$*, contrariamente à hipótese.* ■

Exemplo 24.2 *Considere-se o PVI:* $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t^2}{e^y+\cos^2 t}$ *com* $y(0)=0$.

Vamos considerar a seguinte majoração do campo: $\dfrac{t^2}{e^y+\cos^2 t}\leqslant\dfrac{t^2}{e^y}$ *e o seguinte PVI*

$$\frac{dv}{dt}=\frac{t^2}{e^v}\quad com\quad v(0)=0$$

Temos então, pelo Teorema de Picard Lindelöf, que cada um destes problemas define uma única solução, $y(t)$ *e* $v(t)$ *respectivamente. E pela proposição anterior vem, para* $t\geqslant 0$*:* $y(t)\leqslant v(t)$. *Mas a equação que define* $v(t)$ *é separável e fácil de resolver, obtendo-se sucessivamente (para* $t\geqslant 0$*)*

$$e^v\frac{dv}{dt}=t^2\quad\Leftrightarrow\quad e^v=\frac{t^3}{3}+1\quad\Leftrightarrow\quad v(t)=\log\left(\frac{t^3}{3}+1\right).$$

Por outro lado como $\dfrac{t^2}{e^y+\cos^2 t}\geqslant 0$ *concluímos que* $y(t)$ *é crescente. Portanto* $0\leqslant y(t)\leqslant\log\left(\dfrac{t^3}{3}+1\right)$, *em particular pode-se concluir que* $y(t)$ *não explode para* $t\geqslant 0$ *e consequentemente o seu intervalo de definição contém o intervalo* $[0,+\infty[$.

Podemos agora utilizar a desigualdade $y(t)\leqslant\log\left(\frac{t^3}{3}+1\right)$ *em* $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t^2}{e^y+\cos^2 t}$*, para obter*

$$\frac{dy}{dt}\geqslant\frac{t^2}{e^{\log\left(\frac{t^3}{3}+1\right)}+\cos^2 t}=\frac{t^2}{\dfrac{t^3}{3}+1+\cos^2 t}\geqslant\frac{t^2}{\dfrac{t^3}{3}+2}.$$

Integrando entre 0 *e* t *esta última desigualdade, obtemos* $y(t)\geqslant\log\left(\dfrac{t^3}{3}+2\right)-\log 2$.*Portanto, apesar de não conseguirmos obter a solução* $y(t)$*, deduzimos a seguinte estimativa:*

$$\log\left(\frac{t^3}{6}+1\right)\leqslant y(t)\leqslant\log\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\quad para\ t\geqslant 0.$$

Apêndice: Demonstração do Teorema 24.2

Demonstração. A demonstração divide-se em três partes, a saber: 1. primeiro mostra-se a existência de um intervalo de definição máximo (que corresponde a algo muito intuitivo e que não envolve raciocínios elaborados, contudo exige um elevado nível de abstracção); 2. seguidamente mostra-se que quando nenhuma das três primeiras propriedades se verifica então existe $\lim_{t\to b^-} y(t)$ (resp. $\lim_{t\to a^+} y(t)$); 3. por fim, prova-se por contradição simples que estes limites quando existem não podem pertencer a D.

Pelo Teorema de Picard-Lindelöf, da solução $y(t)$ dada necessitamos apenas de conhecer um valor $t_0 \in I$ e $y_0 = y(t_0)$, que vamos fixar para iniciar a primeira parte da demonstração.

1. Seja $C^1(D)$ o conjunto das funções de classe C^1 que têm o seu gráfico contido em D, i.e.

$$C^1(D) = \bigcup_{\substack{t_a,t_b\in\mathbb{R}\\ t_a<t_b}} C^1(]t_a,t_b[: D)$$

onde $C^1(]t_a,t_b[: D)$ é o conjunto das funções $\psi(t)$ com domínio $]t_a,t_b[$, diferenciáveis neste intervalo e com derivada contínua, tais que para todo $t\in]t_a,t_b[$ se tem $(t,\psi(t))\in D$. Dada uma função $\psi \in C^1(D)$, designe-se por $\mathbf{I}(\psi)$ o seu domínio (que é sempre um intervalo aberto). Defina-se agora o conjunto de soluções

$$S = \left\{\psi\in C^1(D) : t_0\in\mathbf{I}(\psi) \ \wedge\ \psi(t_0)=y_0 \ \wedge\ \forall t\in\mathbf{I}(\psi)\ \frac{d\psi}{dt}(t) = f(t,\psi(t))\right\},$$

e o **intervalo máximo de definição**

$$]a,b[= \bigcup_{\psi\in S}\mathbf{I}(\psi).$$

Sejam $\psi,\tilde\psi\in S$, então pelo resultado de unicidade do Teorema de Picard-Lindelöf obtemos $\psi(t)=\tilde\psi(t)$ para qualquer[6] $t\in\mathbf{I}(\psi)\cap\mathbf{I}\left(\tilde\psi\right)$. Portanto, para cada $t\in]a,b[$ podemos definir $y(t)=\psi(t)$, onde ψ é qualquer função pertencente a S tal que $t\in\mathbf{I}(\psi)$. Esta função $y(t)$ está então bem definida em $]a,b[$ e é a extensão máxima[7] que qualquer solução do problema de valor inicial $\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ com $y(t_0)=y_0$.

2. Sendo $]a,b[$ o intervalo máximo de definição atrás definido, suponha-se que não se verificam para b nenhuma das propriedades i), ii) e iii). Portanto $b\in\mathbb{R}$, $y(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b e $\frac{dy}{dt}(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b.

---

[6] De facto, se por absurdo fosse $\psi(t_2)\neq\tilde\psi(t_2)$ para certo $t_2\in\mathbf{I}(\psi)\cap\mathbf{I}\left(\tilde\psi\right)$, definindo $t_1 = \inf\left\{t : t>t_0 \quad\text{e}\quad \psi(t)\neq\tilde\psi(t)\right\}$ se $t_2>t_0$ ou $t_1=\sup\left\{t : t<t_0 \quad\text{e}\quad \psi(t)\neq\tilde\psi(t)\right\}$ se $t_2<t_0$, obtínhamos, por continuidade, que ψ e $\tilde\psi$ eram soluções localmente distintas do seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t,y) \quad \text{com} \quad y(t_1)=\psi(t_1)=\tilde\psi(t_1),$$

contrariando o Teorema de Picard-Lindelöf.

[7] Mais precisamente, $y\in S$ e qualquer outra função $\psi\in S$ é uma restrição da função y.

Das duas primeiras hipóteses concluímos que ou existe $\lim_{t\to b^-} y(t)$, ou existem dois sublimites distintos de $y(t)$ quando $t \to b^-$. Sejam então β_1 e β_2 dois sublimites de $y(t)$ quando $t \to b^-$. Portanto, existem sucessões r_n e s_n, ambas convergentes para b por valores à esquerda deste ponto tais que

$$\lim_{r_n\to b^-} y(r_n) = \beta_1 \quad \text{e} \quad \lim_{s_n\to b^-} y(s_n) = \beta_2.$$

Mas como $\frac{dy}{dt}(t)$ é limitada numa vizinhança à esquerda do ponto b, digamos $\left|\frac{dy}{dt}(t)\right| \leqslant M$, temos

$$|y(r_n) - y(s_n)| = \left|\int_{s_n}^{r_n} \frac{dy}{dt}(t)\, dt\right| \leqslant |r_n - s_n| M,$$

pelo que

$$\lim_{n\to\infty} |y(r_n) - y(s_n)| = 0,$$

ou seja $\beta_1 = \beta_2$. Concluindo-se a existência do limite $\lim_{t\to b^-} y(t)$.

Com um raciocínio simétrico conclui-se do mesmo modo, que quando não se verificam para o ponto a nenhuma das propriedades i), ii) e iii), então existe $\lim_{t\to a^+} y(t)$.

3. Se por absurdo

$$\lim_{t\to b^-} (t, y(t)) = (b, \beta)$$

com $b \neq +\infty$, $|\beta| \neq +\infty$ e $(b,\beta) \in D\backslash\partial D$ (note-se que $(t, y(t)) \in D$ para qualquer $t \in]a,b[$ e portanto por continuidade (b,β) não pode pertencer ao exterior de D). Então pelo Teorema de Picard-Lindelöf o problema de valor inicial $\frac{du}{dt} = f(t,u)$ com $u(b) = \beta$ tem solução $u(t)$ definida num intervalo $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ para certo $\varepsilon > 0$. Considerando

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{se } t \in]a,b[\\ u(t) & \text{se } t \in [b, b+\varepsilon[\end{cases}$$

Temos que obviamente $\tilde{y}$ é contínua e como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to b^-} \frac{dy}{dt} &= \lim_{t\to b^-} f(t, y(t)) = f(b,\beta) = \lim_{t\to b^+} f(t, u(t)) \\ &= \lim_{t\to b^+} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

concluímos pelo Teorema de Lagrange que $\tilde{y}$ é diferenciável em $t = b$ e portanto uma solução do problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ com $y(t_0) = y_0$. Obtemos então uma contradição com o facto de $]a,b[$ ser o intervalo de definição máximo.

Com um raciocínio simétrico conclui-se do mesmo modo, que é absurdo que

$$\lim_{t\to a^+} (t, y(t)) = (a, \alpha)$$

com $a \neq +\infty$, $|\alpha| \neq +\infty$ e $(a,\alpha) \in D \setminus \partial D$. ∎