23 ª Aula 2006.04.24 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

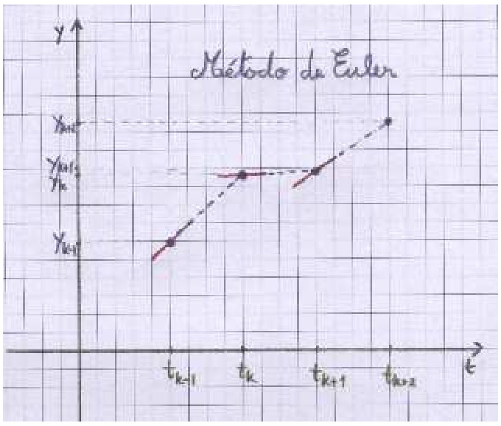
23.1 Método de Euler na aproximação de EDO' s

Métodos numéricos para a determinação de soluções de EDO' s podem ser analisados nesta representação geométrica (campo de direcções). O método mais ingénuo, mas eficaz em inúmeras situações, é o Método de Euler:

Considera-se um PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0.$$

Definem-se os tempos $t_k = t_0 + kh$, onde $h > 0$ é um passo constante e k um inteiro. Pretende-se calcular valores aproximados y_k do valor da solução $y(t_k)$. Conhecido o par (t_k, y_k), aproxima-se o gráfico da solução $y(t)$ no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ por um segmento de recta com inclinação dada por $f(t_k, y_k)$.



O valor aproximado y_{k+1} pode então ser calculado por

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)\,.$$

A sequência y_k é assim obtida por recorrência. Os pontos $\{(t_k, y_k) : k = 0, 1, \ldots N\}$ serão então uma aproximação (discreta) do gráfico da solução procurada $\{(t, y(t)) : t \in [0, Nh]\}$.

23.2 Problema da existência e unicidade

23.2.1 Exemplo 1 (inexistência)

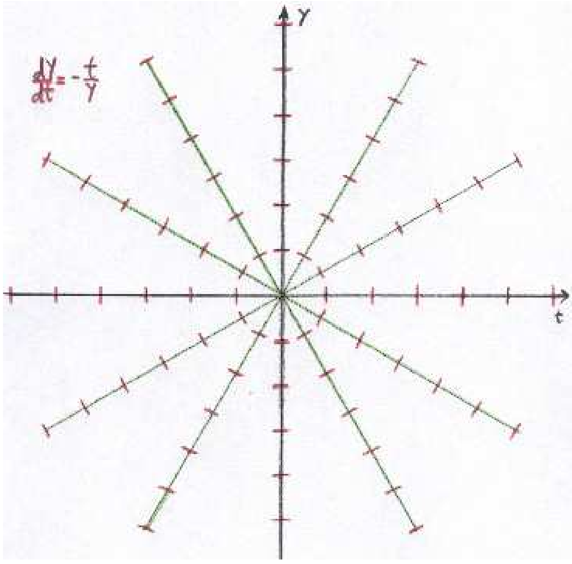
Considere-se a equação diferencial

$$y\frac{dy}{dt} = -t.$$

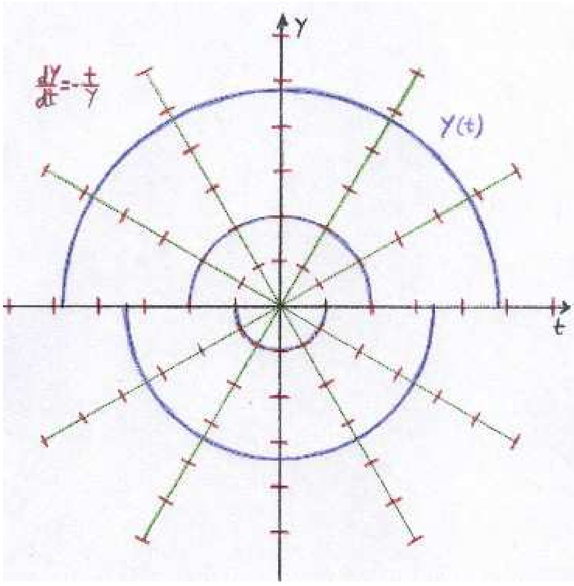
Para $y \neq 0$, temos $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$. As curvas aonde o campo de direcções é constante igual a m, são as rectas que passam na origem

$$y = -\frac{1}{m}t.$$

obtemos assim o seguinte esboço do campo de direcções:



e podemos ter uma ideia das soluções:



Facilmente confirmamos estas figuras uma vez que a equação dada é separável e as soluções $y(t)$ satisfazem a $y^2 + t^2 = c$, obtendo-se as soluções $y(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$.

Verificamos que o problema

$$y\frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(1) = 0,$$

não tem nenhuma solução definida num intervalo aberto que contenha o instante inicial $t_0 = 1$ (embora se possa pensar numa função definida em $[-1, 1]$ generalizando o conceito de solução). E que o problema

$$y\frac{dy}{dt} = -t \quad \text{com} \quad y(0) = 0,$$

também não tem solução (não sendo possível, neste caso, generalizar o conceito de solução).

23.2.2 Exemplo 2 (multiplicidade de soluções)

Considere-se o problema

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{|1-y^2|} \quad \text{com} \quad y(0) = -1.$$

Facilmente se descobre a solução $y(t) \equiv -1$. Mas será que esta solução é única?

Para simplificar esta análise considere-se $|y| \leqslant 1$ e portanto a equação:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2}$$

Para condições iniciais tais que $y \neq -1$ e $y \neq 1$ obtemos: $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{dy}{dt} = 1$. Donde

$$\operatorname{arcsen} y = t + c \quad \text{para} \quad (t+c) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

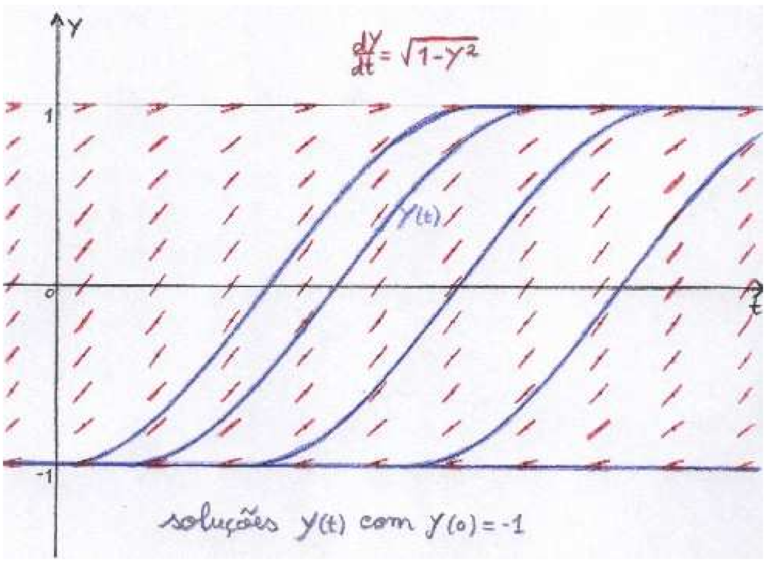
$$y = \operatorname{sen}(t+c) \quad \text{para} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right].$$

Mas esta solução não explode para $t = -\frac{\pi}{2} - c$ ou $t = \frac{\pi}{2} - c$, pelo que pode ser prolongada. Obtemos então as seguintes soluções

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leqslant -\frac{\pi}{2} - c \\ \operatorname{sen}(t+c) & \text{se } -\frac{\pi}{2} - c \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} - c \\ 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} - c \leqslant t \end{cases}$$

Pelo que existem infinitas soluções do nosso problema; basta tomar na expressão acima qualquer $c \leqslant -\frac{\pi}{2}$ para obtermos uma solução da equação diferencial que satisfaz $y(0) = -1$.

Façamos um esboço do campo de direcções e das soluções:



23.3 Teorema de Picard-Lindelöf

Teorema 23.1 (de Picard-Lindelöf) *Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0) \in D$, tais que*

a) *f é contínua em D*

b) *$f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D.*

I. e. , para cada ponto $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e $L > 0$ tal que para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes[1] a V

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L |y_1 - y_2| .$$

Então o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y(t)$ e esta está definida numa vizinhança[2] de t_0.

A próxima proposição mostra que a condição b) no Teorema de Picard-Lindelöf, pode ser substituída por outra menos geral, mas de mais fácil de verificação prática. Em particular, se $f(t, y)$ é de classe C^1 em D, então está nas condições do Teorema.

Proposição 23.2 *Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ é uma função contínua num aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então $f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y em D.*

Demonstração. Dado $(t, y) \in D$, seja V uma vizinhança limitada de (t, y) tal que $\overline{V} \subset D$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é continua, tem um máximo em no compacto $\overline{V}$. Então pelo teorema do valor intermédio (a uma variável - y) temos para $(t, y_1), (t, y_2) \in \overline{V}$, com $\theta \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_1 + \theta(y_1 - y_2)) \right| |y_1 - y_2| \\ &\leqslant \max_{\overline{V}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |y_1 - y_2| . \end{aligned}$$

Portanto, para cada ponto $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e $L = \max_{\overline{V}} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y} \right|$ tal que para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes a V

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L |y_1 - y_2| .$$

■

[1] Note-e que (t, y_1) e (t, y_2) têm a mesma primeira coordenada.
[2] I.e. definida pelo menos para $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, para certo $\varepsilon > 0$.

23.3.1 Demonstração da existência

O Teorema de Picard-Lindelöf contém duas afirmações: a existência da solução e a sua unicidade. Vamos começar por demonstrar a existência construindo explicitamente a solução como o limite de uma sucessão de funções.

Construção da sucessão $y_n(t)$: Comecemos por reparar que o PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0, \tag{23.1}$$

é equivalente à seguinte equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ ds. \tag{23.2}$$

Ou seja, $y(t)$ é uma solução contínua de (23.1) sse é uma solução contínua de (23.2). Note-se que uma solução contínua de qualquer dos problemas é uma função continuamente diferenciável (i. e. de classe C^1). De facto se $y(t)$ é contínua, então por composição de funções contínuas temos que $f(t, y(t))$ é contínua; pelo que $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ é contínua, e $\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ ds$, sendo o integral indefinido de uma função contínua, tem derivada contínua.

Defina-se por recorrência a seguinte sequência de funções $y_n(t)$:

$$\begin{array}{ll} y_0(t) = y_0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\ ds. & \end{array}$$

Vamos agora mostrar que $y_n(t)$ converge uniformemente em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para certo $\varepsilon > 0$ que depende das características da função f.

Convergência uniforme da sucessão $y_n(t)$: Uma vez que f é localmente lipschitziana, seja $\delta > 0$ e $L > 0$ tais que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D$, e para quaisquer pontos (t, y_1) e (t, y_2) pertencentes a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ se tenha

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Sendo f uma função contínua, podemos concluir que existe o máximo da função $|f(t, y)|$ no quadrado $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ que designaremos pela letra M. Defina-se então $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \delta$, $\varepsilon M < \delta$ e $\varepsilon L < 1$.

Então podemos mostrar por indução que cada uma das funções $y_n(t)$ satisfaz a relação $|y_n(t) - y_0| < \delta$, se $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. De facto esta propriedade é obviamente verdadeira para $y_0(t)$; e supondo por hipótese de indução a sua veracidade para $y_n(t)$, obtemos (porque sabemos que $|y_n(t) - y_0| < \delta$ para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$)

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\ ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, y_n(s))|\ ds\right| \leqslant |t - t_0|\,M \leqslant \varepsilon M \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}
|y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n+1}(s))\ ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\ ds \right) \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y_{n+1}(s)) - f(s, y_n(s)) \right) ds \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |y_{n+1}(s) - y_n(s)|\ ds \right| \\
&\leqslant L\, |t - t_0| \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|,
\end{aligned}$$

onde I designa o intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Vem então

$$\max_{t \in I} |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| \leqslant L\varepsilon \max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|,$$

e por indução obtemos

$$\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leqslant (L\varepsilon)^n \max_{t \in I} |y_1(t) - y_0(t)|.$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|} \leqslant L\varepsilon < 1,$$

e concluímos (pelo critério da raiz e pelo critério de Weierstrass) que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_{n+1}(t) - y_n(t) \right),$$

é uniformemente convergente. Mas, nesse caso, o seguinte limite existe e a sua convergência é uniforme em I,

$$\lim_{n \to \infty} y_n(t) = y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_{n+1}(t) - y_n(t) \right).$$

Conclusão: Uma vez que a sucessão $y_n(t)$ é uniformemente convergente, digamos $y(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t)$, concluímos que a função limite $y(t)$ é contínua.

Por outro lado, como $(t, y_n(t))$ está numa vizinhança de (t_0, y_0) quando $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, temos

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))| \leqslant L\, |y_n(t) - y(t)|,$$

(usando a propriedade de f ser localmente lipschitziana, $\varepsilon > 0$ foi escolhido suficientemente pequeno de forma que tal acontecesse). Pelo que a convergência $\lim_{n \to \infty} f(t, y_n(t)) = f(t, y(t))$ também é uniforme em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Então, podemos comutar a operação de limite com a integração, obtendo-se

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{n \to \infty} y_{n+1}(t) = \lim_{n \to \infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\ ds \right) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n \to \infty} f(s, y_n(s))\ ds \\
&= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ ds.
\end{aligned}$$

Pelo que $y(t)$ é solução do problema (23.2), e portanto, a solução do PVI (23.1) que queríamos demonstrar que existia.