

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

20.1 Soluções gerais

Exemplo 20.1 Vamos determinar a solução geral de

$$\frac{dy}{dt} = t(y^2 - 1).$$

Para $y \neq \pm 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y^2 - 1)} \frac{dy}{dt} = t &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) \frac{dy}{dt} = t \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log|y-1| - \log|y+1|) = \frac{t^2}{2} + c \quad \text{onde } c \text{ é uma constante arbitrária} \\ &\Leftrightarrow \log \frac{|y-1|}{|y+1|} = t^2 + 2c \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{t^2+2c} \\ &\Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2c} e^{t^2}, \end{aligned}$$

designando $K = \pm e^{2c}$ (i. e. K é uma constante arbitrária não nula), obtemos

$$y = \frac{1 + K e^{t^2}}{1 - K e^{t^2}}. \quad (20.1)$$

Por outro lado facilmente se reconhece que as funções constantes

$$y(t) \equiv 1 \quad \text{e} \quad y(t) \equiv -1$$

são soluções da equação diferencial. Atendendo que a solução $y(t) \equiv 1$ se obtém da expressão (20.1) com $K = 0$, concluímos que a **solução geral** da equação dada é

$$y(t) = \frac{1 + K e^{t^2}}{1 - K e^{t^2}} \quad \text{ou} \quad y(t) \equiv -1,$$

onde K é uma constante real arbitrária.

20.2 Intervalo máximo de definição e "blow up"

Exemplo 20.2 Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 t \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = t$$

onde

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + c.$$

Da condição $y(1) = 1$, obtemos $c = -\frac{3}{2}$; e portanto

$$y(t) = \frac{2}{3 - t^2}$$

Temos

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} y(t) = +\infty$$

Dizemos que a solução **explode** em $t = \sqrt{3}$. A designação em inglês é correntemente mais empregue: "verifica-se um **blow up**". Note-se que a solução também **explode** em $t = -\sqrt{3}$:

$$\lim_{t \rightarrow (-\sqrt{3})^+} y(t) = +\infty$$

Temos portanto que a solução deste PVI só está definida no intervalo

$$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

que se designa por **intervalo máximo de definição** da solução.

Exemplo 20.3 Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{-t}{y-1} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Temos uma equação separável

$$(y-1) \frac{dy}{dt} = -t$$

onde

$$\frac{y^2}{2} - y = -\frac{t^2}{2} + c.$$

Da condição $y(0) = 0$, obtemos $c = 0$; e portanto

$$y^2 - 2y + t^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$y(t) = 1 \pm \sqrt{1 - t^2}.$$

Novamente da condição inicial obtemos

$$y(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}.$$

Claramente que o intervalo de definição desta solução é

$$]-1, 1[$$

De facto este é o **intervalo máximo de definição** da solução, uma vez que esta não pode ser prolongada por continuidade de forma diferenciável: apesar de

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y(t) = 1 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow (-1)^+} y(t) = 1,$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = +\infty \quad e \quad \lim_{t \rightarrow (-1)^+} y'(t) = -\infty.$$

Também nesta situação dizemos que a **solução explode** (que há um blow up).

Exemplo 20.4 Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Temos uma equação separável, pelo que de

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' = 2t,$$

obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int 2t dt.$$

Portanto

$$\operatorname{arcsen} y = t^2 + c.$$

Utilizando a condição inicial $y(0) = 0$ vem

$$\operatorname{arcsen} y = t^2,$$

para $t^2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donde

$$y = \sin t^2 \quad se \quad t \in \left] -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right[.$$

Por outro lado, atendendo a que

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} \sin t^2 = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} (\sin t^2)' = \lim_{t \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}^+} 2t \cos t^2 = 0$$

e a que a função constante igual a 1 é solução da equação diferencial dada, concluímos que

$$y(t) = \begin{cases} 1 & se \quad t \in \left] -\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \\ \sin t^2 & se \quad t \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \\ 1 & se \quad t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\infty \right[\end{cases}$$

é solução do problema de valor inicial considerado, sendo portanto \mathbb{R} o seu **intervalo máximo de definição**.

20.3 Soluções definidas implicitamente

Exemplo 20.5 Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y^6 + y^2 + 1} \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

Temos uma equação separável $(y^6 + y^2 + 1) \frac{dy}{dt} = 1$, donde $\frac{y^7}{7} + \frac{y^3}{3} + y = t + c$. Da condição $y(1) = 0$, obtemos $c = -1$; e portanto

$$\frac{y^7}{7} + \frac{y^3}{3} + y = t - 1 \quad e \quad y(1) = 0,$$

define implicitamente a solução procurada, uma vez que $f(0) = 1 \neq 0$, onde $f(y) = y^6 + y^2 + 1$. Apesar de não conseguirmos explicitar a solução podemos ainda, neste caso, calcular o intervalo máximo de definição: Designando

$$F(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + x,$$

temos $F'(x) = x^6 + x^2 + 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$, pelo que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijectiva. Designando então por $F^{-1}(x)$ a função inversa¹ de $F(x)$, obtemos

$$y(t) = F^{-1}(t - 1),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluímos então, que o intervalo máximo de definição desta solução é \mathbb{R} .

20.4 Equações exactas

20.4.1 Da solução à equação

De acordo com os exemplos anteriores, consideramos que determinámos a solução $y(t)$ de uma equação diferencial escalar de primeira ordem quando chegamos a uma relação

$$\varphi(t, y) = c = \varphi(t_0, y_0)$$

que define implicitamente $y(t)$ (o teorema da função implícita pode ser usado se $\varphi \in C^1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$). Tentemos agora, por raciocínio inverso, redescobrir a equação diferencial:

Temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, y(t)) = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t)) \frac{dy}{dt}(t) = 0.$$

¹Que é diferenciável e tem derivada contínua; $(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}}$.

Portanto $y(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Será que esta era a equação inicial? Como iremos ver pode ser que não.

No entanto, concluímos que dada uma equação da forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

e a condição inicial

$$y(t_0) = y_0,$$

com $\varphi \in C^1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$, então a solução é dada implicitamente por

$$\varphi(t, y) = c = \varphi(t_0, y_0) \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0.$$

20.4.2 Solução de equações exactas

Considere-se agora uma equação geral da forma

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Pela análise anterior, conseguimos resolver esta equação se existir uma função $\varphi \in C^1$ com $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0$ tal que

$$M(t, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y),$$

ou seja sse o campo (M, N) for um campo gradiente numa vizinhança da condição inicial (t_0, y_0) . Portanto, sse (M, N) for fechado (nessa vizinhança). Ou seja $M, N \in C^1$ tal que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{e} \quad N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Nestas condições dizemos que temos uma **equação diferencial exacta**.

Teorema 20.1 *Seja o PVI*

$$M + N \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0,$$

com $M, N \in C^1$ tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y),$$

para qualquer (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0) e $N(t_0, y_0) \neq 0$. Então o o PVI considerado tem uma única solução $y(t)$ de classe C^1 definida numa vizinhança de $t = t_0$, dada implicitamente pela relação

$$\varphi(t, y) = c \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_0,$$

onde $c = \varphi(t_0, y_0)$ e φ é definido (a menos de uma constante aditiva) por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y) = N(t, y)$$

Exemplo 20.6 Considere-se o problema de valor inicial:

$$y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} + 4ty^3 \frac{dy}{dt} = 0 \quad e \quad y(1) = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}.$$

Definindo

$$M = y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} \quad e \quad N = 4ty^3,$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que a equação é exacta. Então determinemos φ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = y^4 - \frac{1}{t^2 + 1} \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3.$$

Integrando em ordem a t a primeira equação temos

$$\varphi = ty^4 - \operatorname{arctg} t + f(y),$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4ty^3 + f'(y).$$

Donde $f(y)$ é constante e podemos tomar

$$\varphi = ty^4 - \operatorname{arctg} t.$$

Então a solução do problema é dada por

$$ty^4 - \operatorname{arctg} t = \varphi \left(1, \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 1 = 0.$$

Explicitando obtemos (atendendo que $y(1) > 0$)

$$y(t) = \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}},$$

definida para $t > 0$. O intervalo máximo de definição é \mathbb{R} . De facto como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$$

e

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\operatorname{arctg} t}{t} > 0,$$

a função (diferenciável em \mathbb{R})

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{\operatorname{arctg} t}{t}} & , \text{ se } t \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

é solução do problema dado.