19 ª Aula 2006.04.07 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

19.1 Equações lineares

As equações lineares de primeira ordem (escalares) são da forma:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = b(t)\,,$$

onde são dadas as funções $a(t)$ e $b(t)$, procurando-se a função $y(t)$. Geralmente, a um problema que envolva uma EDO, está associada uma **condição inicial**

$$y(t_0) = y_0.$$

Ao problema de resolver uma EDO com uma condição inicial chamamos **problema de valor inicial (PVI)**. Vamos agora resolver dois casos triviais da equação linear.

A funções $a(t)$ e $b(t)$ supõem-se continuas num determinado intervalo I, pelo que têm primitiva no mesmo intervalo e podem, portanto, ser integradas em qualquer subintervalo de I.

19.1.1 Caso $a(t) = 0$.

Neste caso o problema resume-se a uma simples primitivação:

$$\frac{dy}{dt} = b(t)\,,$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + y_0.$$

Exemplo 19.1 *O seguinte PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{-t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem como solução[1]

$$y(t) = \int_0^t e^{-s^2}\, ds.$$

[1] A função $\int_0^t e^{-s^2}\, ds$ não tem uma expressão elementar simples mas encontra-se devidamente tabelada (distribuição normal). Podemos contudo exprimir esta função em temos de séries de potências:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-s^2}\, ds &= \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{s^{2n}}{n!}\, ds = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^t \frac{s^{2n}}{n!}\, ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}. \end{aligned}$$

19.1.2 Caso $b(t) = 0$. (lineares homogéneas)

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = 0, \tag{19.1}$$

Se $y_0 = 0$, temos uma solução trivial $y(t) \equiv 0$. Pelo que no que se segue supõe-se $y_0 \neq 0$ (pelo que $y(t) \neq 0$ pelo menos para valores de t numa vizinhança de t_0). Dividindo a equação por y obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\log|y| = -a(t).$$

Por primitivação vem

$$\log|y(t)| = -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds + \log|y_0|,$$

e exponenciando sai

$$y(t) = \pm y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds},$$

podemos então concluir que se $y_0 \neq 0$, então $y(t)$ não se anula nunca porque $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \neq 0$. Usando novamente a condição inicial obtemos

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Note-se que esta formula é ainda válida no caso $y_0 = 0$ (por verificação directa). Por outro lado se $y(t)$ tem esta forma, então $y'(t) = \left(y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}\right)' = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)' = -a(t)\, y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} = -a(t)\, y(t)$. Ou seja, uma função $y(t)$ é solução de (19.1) sse tem a forma

$$y(t) = K e^{-\int a(t)\, dt},$$

onde K é uma constante arbitrária.

Exemplo 19.2 *Considerando o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{y} + \cos t\; y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

temos

$$y(t) = K e^{-\int \cos t dt} = K e^{-\operatorname{sen} t},$$

$$1 = y(0) = K,$$

portanto a solução é

$$y(t) = e^{-\operatorname{sen} t}$$

Mudando a condição inicial para $y(0) = 0$ *obteríamos* $y(t) = 0, \forall t$. *Considerando a condição inicial* $y(2) = 3$, *obteríamos*

$$y(t) = 3e^{-(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2)} = 3e^{\operatorname{sen} 2} e^{-\operatorname{sen} t}.$$

19.1.3 Factor de integração

Consideremos agora o caso geral

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \quad , \qquad y(t_0) = y_0. \tag{19.2}$$

Multiplique-se (19.2) por $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ $\quad (\neq 0)$ **(factor de integração)** [2]:

$$\mu\frac{dy}{dt} + a(t)\,\mu y = \mu(t)\,b(t)\,,$$

mas $\dfrac{d\mu}{dt} = a(t)\,\mu$, donde

$$\mu\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)\,b(t)$$

e, de acordo com a regra de derivação do produto,

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu(t)\,b(t)\,.$$

Integrando entre t_0 e t, vem

$$\mu(t)\,y(t) - \mu(t_0)\,y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)\,b(s)\,ds,$$

e como $\mu(t_0) = 1$ e $y(t_0) = y_0$, obtem-se

$$y(t) = \frac{y_0}{\mu(t)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mu(s)}{\mu(t)} b(s)\,ds.$$

Mas $\dfrac{\mu(s)}{\mu(t)} = e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau}$, donde:

19.1.4 Solução

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)\,ds$$

Teorema 19.1 *Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $a(t)$ e $b(t)$ duas funções contínuas em I. Então o problema*

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \quad , \qquad y(t_0) = y_0.$$

tem uma única solução dada por

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)\,ds$$

que está definida em todo o intervalo I e é de classe C^1.

[2] Por razões estéticas, escreve-se por vezes y e μ em vez de $y(t)$ e $\mu(t)$, respectivamente.

19.1.5 Exemplos

Exemplo 19.3 *Vamos resolver o seguinte PVI:* $y' + 2ty = t$, *com* $y(0) = 1$.
Multiplicando a equação por um factor de integração μ, *temos*

$$\mu \frac{dy}{dt} + 2t\mu y = t\mu,$$

que à equivalente à equação

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu, \tag{19.3}$$

se $\frac{d\mu}{dt} = 2t\mu$. *Então podemos tomar* $\mu = e^{t^2}$.
Portanto, a relação (19.3) escreve-se

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2} y\right) = te^{t^2}$$

e por integração

$$e^{t^2} y = \frac{e^{t^2}}{2} + c.$$

De $y(0) = 1$, *obtemos* $1 = \frac{1}{2} + c$, *donde* $c = \frac{1}{2}$. *A solução pretendida é então* $y(t) = \dfrac{1 + e^{-t^2}}{2}$.

Exemplo 19.4 *Vamos resolver o seguinte PVI:* $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{1+t} y = 1$, *com* $y(0) = 0$.
Como a equação é linear podemos desde já garantir que o intervalo de definição da solução é $]-1, +\infty[$, *porque a equação não está definida para* $t = -1$ *e o instante inicial é* $t_0 = 0 \in\ ]-1, +\infty[$.
Multiplicando a equação por um factor de integração μ, *temos*

$$\mu \frac{dy}{dt} + \frac{1}{1+t} \mu y = \mu,$$

que à equivalente à equação

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu, \tag{19.4}$$

se $\dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{1}{1+t}\mu$. *Portanto (para* $t \in\ ]-1, +\infty[$*)*

$$\mu = Ke^{\int \frac{1}{1+t} dt} = Ke^{\log(1+t)} = K(1+t).$$

Tomemos $\mu = 1 + t$. *Então de (19.4) vem*

$$\frac{d}{dt}((1+t)y) = 1 + t$$

e por integração

$$(1+t)y = t + \frac{t^2}{2} + c.$$

De $y(0) = 0$, *obtemos* $c = 0$ *e a solução pretendida* $y(t) = \dfrac{t + \frac{t^2}{2}}{1+t}$.

19.2 Equações Separáveis

Vamos agora considerar equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \quad , \qquad y(t_0) = y_0, \tag{19.5}$$

onde g e f são funções contínuas.

19.2.1 Primitivação

Temos

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Seja $F(y)$ **uma primitiva de** $f(y)$, i. e. $F'(y) = f(y)$, então

$$F'(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Donde

$$\frac{d}{dt}F(y) = g(t),$$

porque $\frac{d}{dt}F(y(t)) = F'(y(t))\frac{dy}{dt}(t)$, (derivação da função composta). Sendo $G(t)$ **uma primitiva de** $g(t)$, obtemos

$$F(y(t)) = G(t) + c. \tag{19.6}$$

Onde a constante c é determinada pela condição inicial $y(t_0) = y_0$:

$$c = F(y_0) - G(t_0)$$

19.2.2 Inversão

A relação (19.6) dá-nos a solução pretendida se definir implicitamente $y(t)$. I. e. se $F(y)$ for invertível numa vizinhança de y_0. De facto se F^{-1} **é a função inversa (local)** de F, obtemos

$$y(t) = F^{-1}(G(t) + c).$$

Podemos garantir a existência de F^{-1} - função inversa (local) de F numa vizinhança de y_0 - através do Teorema da função inversa com a condição de F ter derivada contínua e $F'(y_0) \neq 0$. Ou seja se $f(y)$ for contínua numa vizinhança de $y = y_0$ e

$$f(y_0) \neq 0.$$

Esta condição é suficiente para garantir a invertibilidade de F, mas não é uma condição necessária como poderemos ver no Exemplo 19.7 mais à frente.

19.2.3 Solução

Teorema 19.2 *Seja*

1. $g(t)$ *um função continua na vizinhança do ponto* $t = t_0$,
2. $f(y)$ *um função continua na vizinhança do ponto* $y = y_0$ *e tal que* $f(y_0) \neq 0$.

Então o problema
$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \quad , \qquad y(t_0) = y_0,$$
tem uma única solução $y(t)$ *de classe* C^1 *definida numa vizinhança de* $t = t_0$, *definida implicitamente pela relação*
$$F(y(t)) = G(t) + c,$$
onde F *é uma primitiva de* f, G *uma primitiva de* g, *e* $c = F(y_0) - G(t_0)$.

19.2.4 Exemplos

Exemplo 19.5 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*
$$\frac{dy}{dt} = \cos^2 y \cos t \quad \text{com} \quad y(0) = \pi.$$
Temos $\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dt} = \cos t$, *primitivando vem* $\operatorname{tg} y = \operatorname{sen} t + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = \pi$, *concluímos* $\operatorname{tg} y = \operatorname{sen} t$. ***Invertendo a função*** tg ***numa vizinhança de*** π, *obtemos*
$$y = \pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)$$

Exemplo 19.6 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*
$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\cos y} \quad \text{com} \quad y(0) = \pi.$$
Temos $\cos y \frac{dy}{dt} = t$, *primitivando vem* $\operatorname{sen} y = \frac{t^2}{2} + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = \pi$, *concluímos* $\operatorname{sen} y = \frac{t^2}{2}$. ***Invertendo a função*** sen ***numa vizinhança de*** π *obtemos*
$$y = \pi - \operatorname{arcsen} \frac{t^2}{2}.$$
Esta solução está definida para $-1 < \frac{t^2}{2} < 1$, *ou seja* $t \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Exemplo 19.7 *Considere-se o PVI (problema de valor inicial)*
$$y^2 \frac{dy}{dt} = 3t^8 \quad \text{com} \quad y(0) = 0.$$
Primitivando vem $\frac{y^3}{3} = \frac{t^9}{3} + c$, *e pela condição inicial* $y(0) = 0$, *concluímos* $y^3 = t^9$. ***Invertendo a função*** y^3, *obtemos*
$$y(t) = t^3.$$
Esta solução está definida todo $t \in \mathbb{R}$.