18 ª Aula 2006.04.05 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

18.1 Equação diferencial; conceitos e notações

Uma equação diferencial é uma relação entre uma função y e as suas derivadas, podendo envolver as variáveis de y. Esta equação poderá determinar a função y.

Exemplo 18.1 *A relação*

$$y' = e^t,$$

é uma equação diferencial onde a incógnita é a função $y(t)$. Esta equação pode ser resolvida por simples primitivação, obtendo-se $y(t) = e^t + c$, onde c é uma constante real arbitrária, i.e. para cada valor de c obtém-se uma solução diferente da mesma equação diferencial.

Exemplo 18.2 *A relação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

é uma equação diferencial onde a incógnita é a função $u(x, y)$. Já sabemos que as soluções desta equação são as partes reais das funções analíticas.

Uma equação como a do exemplo anterior diz-se uma **equação diferencial parcial**, ou equação diferencial às (com) derivadas parciais, em oposição às equações diferenciais ordinárias.

Uma **equação diferencial ordinária** é uma relação entre uma função y de **uma** variável real e as suas derivadas.

A ordem de uma equação diferencial é a maior ordem de derivação que aparece na equação.

Exemplo 18.3 *A relação*

$$y'' + \operatorname{sen} y = 0,$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, onde a incógnita é a função $y(t)$.

Exemplo 18.4 *A relação*

$$x''' + t^2 x' + \operatorname{sen} x = \operatorname{arctg} t,$$

é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, onde a incógnita é a função $x(t)$.

Exemplo 18.5 $\dfrac{du}{ds} + u\, e^s + s^2 = u^2,$

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, onde a incógnita é a função $u(s)$.

Exemplo 18.6 $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, onde a incógnita é a função $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com valores em $\mathbb{R}^3$.

Conforme o contradomínio da função incógnita, as EDO classificam-se em escalares ou vectoriais.

18.2 Lei de Newton

No Séc. XVII Newton propôs a seguinte lei geral da mecânica (Lei de Newton)

$$ma = F$$

onde a força F pode depender da posição x, da velocidade $v = \frac{dx}{dt}$ e do tempo t. Trata-se de uma equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

ou (com $v = \frac{dx}{dt}$)

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

no caso em que F só dependa de v e t.

Newton não só inventou esta lei geral da mecânica, que é "os movimentos físicos podem ser descritos pelas soluções de uma equação diferencial", como descreveu F no caso da atracção gravítica, obtendo pela primeira vez na história, uma lei que explicou de forma universal o movimento planetário. Todo este formalismo continua a ser aplicado com êxito, por exemplo, nas viagens espaciais.

18.3 Modelos

Esta abordagem aplicada com tanto sucesso na astronomia depressa se transformou numa pedra basilar de toda a ciência:

Num certo contexto pretendemos estudar a dependência temporal de uma certa quantidade $y(t)$, (por exemplo, para fazer previsões)

$$y(t) : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

onde a variável t representa habitualmente o tempo. A quantidade $y(t)$ pode representar, conforme o objecto do estudo, a posição de um corpo, um sinal eléctrico, a concentração de um reagente ou a cotação das acções da PT... A ideia é arranjar um modelo não directamente para a quantidade global $y(t)$, mas fazer raciocínios com base em acções instantâneas envolvendo quantidades como a taxa de variação instantânea:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{dy}{dt}(t)$$

e assim chegar a uma lei do tipo

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), t).$$

Finalmente com base nesta lei, que é uma equação diferencial, determinar o comportamento global $y(t)$, i. e. resolver a equação diferencial.

18.4 Exemplo

O volume $v(t)$ de líquido num tanque (v em litros, t em segundos) é, no instante inicial $t = 0$, igual a 3 litros. Sabendo que o tanque enche à razão de

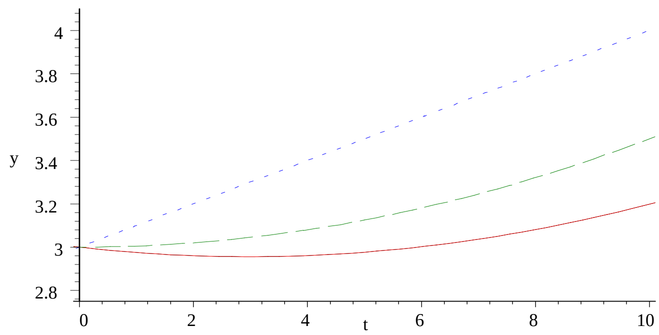
a) $0,1$
b) $t/100$
c) $t/100 - v/100$

litros por segundo, determine o volume de líquido no tanque ao final de 10 segundos.

a) É um problema de instrução primária. Mas que pode ser resolvido via equação diferencial:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad v(0) = 3.$$
$v(0) = 3$ é uma **condição inicial.** Integrando entre 0 e t
$$v(t) - v(0) = \frac{t}{10}.$$
Donde $v(10) = 3 + \frac{10}{10} = 4$ litros .

b) Este novo problema corresponde ao abrir da torneira que deita o líquido para o tanque. É um problema de primitivação simples:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{t}{100} \quad \text{e} \quad v(0) = 3$$
integrando entre 0 e t
$$v(t) - v(0) = \frac{t^2}{200}.$$
Donde $v(10) = 3 + \frac{10^2}{200} = 3,5$ litros .

c) Temos a situação anterior mas agora o tanque está furado e escoa líquido em proporção com a altura do líquido no tanque. Agora temos uma equação diferencial que ainda não sabemos resolver:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{t}{100} - \frac{v}{100} \quad \text{e} \quad v(0) = 3$$
No que se segue vamos justamente aprender a resolver equações deste tipo (equações lineares). Iremos obter $v(t) = t + 103e^{-\frac{1}{100}t} - 100$ e o valor (aproximado) $v(10) \approx 3.198$.



Evolução do volume de líquido nos três casos:
a) a pontilhado; b) a tracejado; c) a cheio.