15 ª Aula 2006.03.29 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

15.1 Aplicações do Teorema dos Resíduos Integrais de funções racionais

Considerem-se os polinómios P e Q de grau m e n respectivamente. Iremos supor que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $n \geqslant m+2$, o que garante a existência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Vamos expor um raciocínio clássico que permite calcular este integral através do teorema dos resíduos.

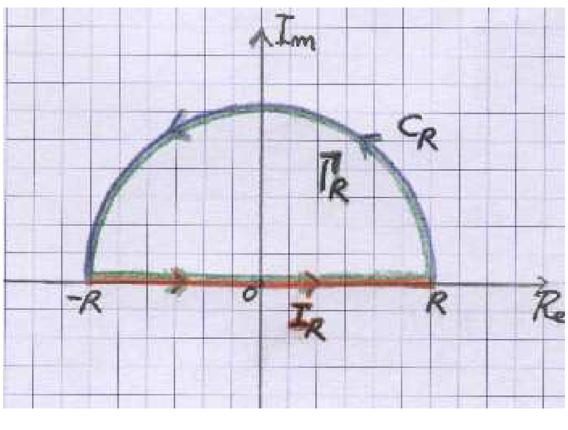
Comecemos por transformar o integral de uma função real de variável real num integral de caminho complexo:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\end{aligned}$$

onde I_R é o segmento recta sobre o eixo real que liga os pontos $z=-R$ com $z=R$. Vamos agora transformar este integral num integral sobre um caminho fechado para que se possa aplicar o teorema dos resíduos:

$$\int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz - \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

onde C_R é a semicircunferência de raio R e centro na origem, situada no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (orientada do ponto $z=R$ para o ponto $z=-R$); e Γ_R é a concatenação das curvas orientadas I_R e C_R (sendo portanto uma curva fechada simples orientada no sentido positivo).



Note-se que, pelo teorema dos resíduos, $\oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$ tem o mesmo valor para qualquer R suficientemente grande, i. e.

$$\forall R, \widetilde{R} > R_0 \qquad \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \oint_{\Gamma_{\widetilde{R}}} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

onde R_0 é o maior dos módulos dos zeros de $Q(z)$ ($R_0 = \max\{|z| : Q(z) = 0\}$).

A possibilidade de continuar o cálculo utilizando o teorema dos resíduos baseia-se na seguinte proposição (Proposição 15.1), obtendo-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

onde R é um real positivo qualquer tal que $R > R_0$.

Proposição 15.1 *Seja $P(z)$ um polinómio de grau m, $Q(z)$ um polinómio de grau n, $n \geqslant m+2$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \text{ e } \operatorname{Im} z > 0\}$. Então*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$$

Demonstração. *Facilmente se reconhece que o seguinte limite existe*

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-m} = w \in \mathbb{C}.$$

Pelo que existe M (por exemplo $M = 1 + |w|$), para o qual se pode afirmar que existe $\widetilde{R_0}$ tal que

$$|z| > \widetilde{R_0} \Rightarrow \left| \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-m} \right| < M.$$

Feita a escolha destes números M e $\widetilde{R_0}$, temos, para $R > \widetilde{R_0}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \right| &\leqslant \int_{C_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| |dz| \\ &\leqslant \int_{C_R} \frac{M}{|z|^{n-m}}\,|dz| = \\ &\leqslant \frac{M}{R^{n-m}} \int_{C_R} |dz| = \\ &\leqslant \frac{M\pi}{R^{n-m-1}}. \end{aligned}$$

Como $n - m - 1 \geqslant 1$, obtemos

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \right| \leqslant \lim_{R\to+\infty} \frac{M\pi}{R^{n-m-1}} = 0$$

■

Exemplo 15.1 *Com as notações acima descritas, temos*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz \\
&= \lim_{R\to+\infty}\left(\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz - \int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz\right),
\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições da Proposição 15.1 ($m = 0 \leqslant n-2 = 4-2$), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx &= \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{1+z^4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4}\right) \\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+z^4} + \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1+z^4}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} + \frac{1}{4\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}\left(-1-i+1-i\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo 15.2 *Com as notações acima descritas, temos*

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} \frac{z^4}{1+z^6}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_R} \frac{z^4}{1+z^6}\,dz - \int_{C_R}\frac{z^4}{1+z^6}\,dz\right),
\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições da Proposição 15.1 ($m = 2 \leqslant n-2 = 6-2$), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx &= \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_2} \frac{z^4}{1+z^6}\,dz \\
&= \pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^4}{1+z^6} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{2}}} \frac{z^4}{1+z^6} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{5\pi}{6}}} \frac{z^2}{1+z^6}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $1+z^6$ *tem as raizes* $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ *e* $e^{i\frac{11\pi}{6}}$, *mas apenas as três primeiras se encontram na região delimitada pela curva* Γ_2. *Por outro lado*

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^4}{1+z^6} &= \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z^4\left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{1+z^6} \\
&= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{\left(z-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}{1+z^6} \\
&= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{e^{i\frac{4\pi}{6}}}{6e^{i\frac{5\pi}{6}}} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{6}.
\end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, vem

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx &= \pi i \left(\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5} + \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^5} + \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4 \frac{1}{6\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^5} \right) \\
&= \frac{\pi i}{6}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{6}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2} - i + \frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

15.2 Aplicações do Teorema dos Resíduos Lema de Jordan

De forma semelhante à Proposição 15.1, o seguinte lema permite o cálculo de certos integrais de variável real.

Lema 15.2 (Lema de Jordan) *Se* $f(z)$ *é analítica no semiplano* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, *excepto possivelmente num número finito de singularidades isoladas, é tal que*

$$\lim_{R\to\infty} \max_{z\in C_R} |f(z)| = 0,$$

e se $\alpha > 0$, *então*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0,$$

onde $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad e \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Observação 15.1 *Como* $\alpha > 0$ *e* $\operatorname{Im} z > 0$, *temos* $|e^{i\alpha z}| = |e^{ix}e^{-\alpha y}| = e^{-\alpha y} < 1$, *(com* $z = x + iy$*) é este pequeno factor que permite a conclusão do lema.*

Demonstração. *Temos*

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz\right| \leqslant \int_{C_R} |f(z)|\, \left|e^{i\alpha z}\right|\, |dz| \leqslant \max_{z\in C_R} |f(z)| \int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z}\, |dz|\,.$$

Como por hipótese $\max_{z\in C_R} |f(z)|$ *converge para zero, basta agora verificar que o último integral é limitado:*

$$\int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z}\, |dz| = R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \operatorname{sen}\theta}\, d\theta \leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha 2R\theta}{\pi}}\, d\theta,$$

porque $\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \operatorname{sen}\theta$ *se* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Portanto*

$$\int_{C_R} e^{-\alpha \operatorname{Im} z}\, |dz| \leqslant 2R\left[\frac{-\pi e^{-\frac{\alpha 2R\theta}{\pi}}}{\alpha 2R}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \leqslant \frac{\pi}{\alpha}.$$

■

Exemplo 15.3 *Seja* C_R *a semicircunferência* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad e \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *(orientada do ponto* $z = R$ *para o ponto* $z = -R$*);* $I_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R \quad e \quad \operatorname{Im} z = 0\}$ *o segmento de recta orientado de* $z = -R$ *e* $z = R$*; e* Γ_R *a concatenação das curvas orientadas* I_R *e* C_R *(sendo portanto uma curva fechada simples orientada no sentido positivo). Temos*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \operatorname{Re} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{I_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz\right),\end{aligned}$$

então, notando que estamos nas condições do Lema de Jordan (Lema 15.2), uma vez que

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{1+z^2} = 0 \quad e \quad e^{iz} = e^{i\alpha z} \text{ com } \alpha = 1 > 0,$$

obtemos

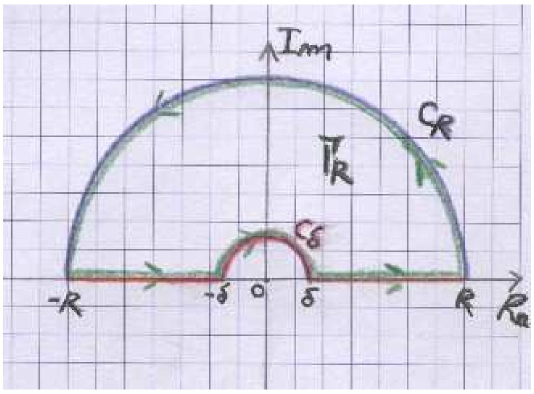
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx &= \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \\ &= 2i \frac{e^{i(i)}}{i+i} \\ &= \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

Enquanto em exemplos anteriores aplicamos o Teorema dos resíduos para calcular integrais que poderiam ser calculados por primitivação elementar, neste último exemplo conseguimos calcular um integral de uma função que não tem primitiva elementar. No próximo exemplo esta situação repete-se.

Exemplo 15.4

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \lim_{\delta\to 0^+} \left(\int_{\delta}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{-R}^{-\delta} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \right) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{Im} \left(\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \right)
\end{aligned}$$

onde C_δ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ percorrida do ponto δ para o ponto $-\delta$ e Γ_R é a concatenação das curvas C_R e $-C_\delta$ com os segmentos de recta definidos por $\operatorname{Im} z = 0$ e $\delta \leqslant |\operatorname{Re} z| \leqslant R$.



Pelo Lema de Jordan (Lema 15.2) temos

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

e pelo Teorema de Cauchy ($z = 0$ está no exterior da região delimitada pela curva Γ_R)

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Por outro lado (usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue)

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0^+} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\delta e^{i\theta}}}{\delta e^{i\theta}}\, i\delta e^{i\theta} d\theta = i \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{\pi} e^{i\delta e^{i\theta}}\, d\theta = i \int_0^{\pi} d\theta \\
&= i\pi.
\end{aligned}$$

Pelo que

$$\mathbf{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \operatorname{Im}(i\pi) = \pi.$$