

14.1 Cálculo de resíduos em pólos de ordem m

Se f tem um pólo de ordem $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} > 0$) no ponto z_0 então (para z tal que $0 \neq |z - z_0| < R$; para certo $R > 0$)

$$f(z) = \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

com $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$. Considere-se então a função

$$g(z) = f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}.$$

Vem

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+\mathbf{m}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-\mathbf{m}} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

onde $\tilde{a}_n = a_{n-\mathbf{m}}$. A função $g(z)$ é portanto analítica em z_0 se definirmos $g(z_0) = \tilde{a}_0 = a_{-\mathbf{m}} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Temos então

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dz^n}(z_0) \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} (f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}) \end{aligned}$$

Como o coeficiente $\tilde{a}_{\mathbf{m}-1} = a_{-1}$ é o resíduo da função $f(z)$ em z_0 , obtivemos assim a seguinte fórmula para o cálculo do resíduo num pólo de ordem $\mathbf{m}$ ¹:

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(\mathbf{m}-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{\mathbf{m}-1}}{dz^{\mathbf{m}-1}} (f(z) (z - z_0)^{\mathbf{m}}). \quad (14.1)$$

¹Uma vez que não se usou que $a_{-\mathbf{m}} \neq 0$, a fórmula é ainda válida se tivermos um pólo de ordem inferior a $\mathbf{m}$.

Exemplo 14.1 Vamos calcular o seguinte integral sobre a circunferência de raio 3π centrada na origem percorrida no sentido positivo:

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z(e^z - 1)} dz.$$

Considere-se a função $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$. Como $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ concluímos que $e^z - 1$ tem um zero simples em $z = 0$; então $z(e^z - 1)$ tem um zero de segunda ordem em $z = 0$, pelo que $f(z)$ tem um pólo de segunda ordem no mesmo ponto e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(e^z - 1)} z^2 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - ze^z}{2(e^z - 1)e^z} \\ &= \frac{-1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{(e^z - 1)} \\ &= \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

Note-se ainda que dentro da região delimitada pela circunferência $|z| = 3\pi$ existem mais duas singularidades isoladas de $f(z)$, são elas $z = 2\pi i$ e $z = -2\pi i$. No próximo cálculo vamos verificar que estas singularidades são pólos simples (de acordo com a Proposição 13.1) e ao mesmo tempo calculamos os seus resíduos por aplicação da fórmula (14.1). Temos então

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} (z \mp 2\pi i) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{z(e^z - 1)} \\ &= \frac{1}{\pm 2\pi i} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{(z \mp 2\pi i)}{(e^z - 1)} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{1}{e^z} \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

pelo que estas singularidades são pólos simples e

$$\operatorname{Res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = \pm \frac{1}{2\pi i}.$$

Finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3\pi} \frac{1}{z(e^z - 1)} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-2\pi i} f(z) \right) \\ &= -\pi i. \end{aligned}$$

14.2 Aplicações do Teorema dos Resíduos

Integrais de funções trigonométricas

Considere-se o seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \quad (14.2)$$

onde f é uma função complexa de variável complexa analítica sobre a circunferência unitária centrada na origem. Notando que $z = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da circunferência $|z| = 1$, percorrida no sentido positivo, podemos relacionar o integral de variável real (14.2) com o um integral caminho complexo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz} dz, \end{aligned}$$

onde a curva $|z| = 1$ é considerada com o sentido positivo.

Neste contexto convem referir que, com $z = e^{i\theta}$, se tem

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i}. \end{aligned}$$

Exemplo 14.2

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \cos(\theta) - 5} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2(z + z^{-1}) - 5} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - 2)(z - \frac{1}{2})} dz = \frac{1}{2i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z - 2)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{1}{(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{-2\pi}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 14.3

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 \sin(\theta) - 5} d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{4 \frac{z - z^{-1}}{2i} - 5} \frac{1}{iz} dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - i5z - 2} dz \\ &= \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - i2)(z - \frac{i}{2})} dz = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{(\frac{i}{2} - 2i)} \\ &= \frac{-2\pi}{3} \end{aligned}$$

O resultado acima exposto pode ser aplicado a uma miríade de outras situações semelhantes. É o que se pretende ilustrar nos seguintes exemplos.

Exemplo 14.4

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(3\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos(3\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2} (e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z^{-3}}{iz} dz = \frac{1}{4i} \left(\oint_{|z|=1} z^2 dz + \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^4} dz \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por aplicação trivial do Teorema dos Resíduos.

Exemplo 14.5 Fazendo a substituição $t = \pi\theta$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(e^{i\pi\theta}) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz} dz. \end{aligned}$$

Exemplo 14.6 Vamos calcular o integral

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{\pi x}{2}$,

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{2 + \cos(t)} dt.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{2}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{4z + z^2 + 1} dz \\ &= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2)^2 - 3} dz \\ &= \frac{4}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} dz. \end{aligned}$$

Atendendo que $|-2 - \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3} > 1$ e $|-2 + \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} < 1$, vem pelo Teorema dos resíduos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} dx &= \frac{4}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} \\ &= 8 \lim_{z \rightarrow -2+\sqrt{3}} \frac{1}{(z+2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$