13 ª Aula 2006.03.24 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

13.1 Singularidades isoladas

Para na prática podermos aplicar o teorema dos resíduos com eficiência, precisamos de conhecer técnicas de cálculo de resíduos. Com esse objectivo vamos enunciar algumas definições e proposições elementares que nos permitirão posteriormente introduzir as referidas técnicas de cálculo de resíduos.

Definição 13.1 *Seja f uma função complexa de variável complexa e $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que f tem uma* ***singularidade isolada*** *em z_0 se não é analítica (ou não está definida) em z_0, mas existe $\varepsilon > 0$ tal que f é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.*

Definição 13.2 *Seja f uma função complexa de variável complexa e $z_0 \in \mathbb{C}$. Se existe $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ tal que para qualquer z satisfazendo $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, se tem*

$$f(z) = \sum_{n=\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

com $a_{\mathbf{m}} \neq 0$. Ou dito de outra forma, f admite um desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto z_0 e a sua parte singular é finita, sendo $\mathbf{m}$ a ordem da primeira potência do desenvolvimento. Então:

1. *se $\mathbf{m} > \mathbf{0}$ então z_0 é um* ***zero de ordem*** *$\mathbf{m}$ da função f.*
2. *se $\mathbf{m} \geqslant \mathbf{0}$ e z_0 é uma singularidade isolada, então z_0 é uma* ***singularidade removível*** *da função f.*
3. *se $\mathbf{m} < \mathbf{0}$ então z_0 é um* ***pólo de ordem*** *$-\mathbf{m}$ da função f.*

Definição 13.3 *Se f tem uma* singularidade isolada *em z_0 que* não é *nem uma singularidade removível, nem um pólo de certa ordem, então z_0 é uma* ***singularidade essencial*** *de f. Ou dito de outra forma f tem uma* ***singularidade essencial*** *em z_0 sse o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto z_0 tem uma parte singular infinita*[1].

Portanto as singularidades isoladas classificam-se (exclusivamente) em **singularidades removíveis, pólos** ou **singularidades essenciais**.

[1] Dizemos que uma série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ tem uma parte singular infinita se o conjunto de inteiros $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$ é infinito.

Exemplo 13.1

1. *a)* $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots$

   $z = 0$ é um zero de primeira ordem (ou um zero simples) de $\operatorname{sen} z$.

   b) $z^3 \operatorname{sen} z = z^4 - \dfrac{z^6}{3!} + \dfrac{z^8}{5!} - \ldots$

   $z = 0$ é um zero de 4ª ordem de $z^3 \operatorname{sen} z$.

2. *a)* $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \ldots$

   $z = 0$ é uma singularidade removível de $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

   b) $\dfrac{\operatorname{sen} z^3}{z} = z^2 - \dfrac{z^8}{3!} + \dfrac{z^{14}}{5!} - \ldots$

   $z = 0$ é uma singularidade removível e um zero de 2ª ordem de $\frac{\operatorname{sen} z^3}{z}$.

3. *a)* $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{3!} + \dfrac{z^3}{5!} - \ldots$

   $z = 0$ é um pólo de 1ª ordem (ou um pólo simples) de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$,
   o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ *em $z = 0$ é 1.* $\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = 1\right)$

   b) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^6} = \dfrac{1}{z^5} - \dfrac{1}{3!\, z^3} + \dfrac{1}{5!\, z} - \dfrac{1}{7!} z + \dfrac{1}{9!} z^3 \ldots$

   $z = 0$ é um pólo de 5ª ordem de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^6}$,
   o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^6}$ *em $z = 0$ é* $\frac{1}{5!}$. $\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^6} = \frac{1}{5!}\right)$

   c) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^7} = \dfrac{1}{z^6} - \dfrac{1}{3!\, z^4} + \dfrac{1}{5!\, z^2} - \dfrac{1}{7!} + \dfrac{1}{9!} z^2 \ldots$

   $z = 0$ é um pólo de 6ª ordem de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^7}$,
   o resíduo de $\frac{\operatorname{sen} z}{z^7}$ *em $z = 0$ é 0.* $\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z^7} = 0\right)$

4. *a)* $z^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{z} = z^2 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5! z^2} - \dfrac{1}{7! z^4} \ldots$

   $z = 0$ é uma singularidade essencial de $z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$,
   o resíduo de $z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ *em $z = 0$ é 0.* $\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}\right) = 0\right)$

   b) $z^5 \operatorname{sen} \dfrac{1}{z^2} = z^3 - \dfrac{1}{3!\, z} + \dfrac{1}{5!\, z^5} - \dfrac{1}{7! z^9} - \ldots$

   $z = 0$ é uma singularidade essencial de $z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}$,
   o resíduo de $z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}$ *em $z = 0$ é* $\frac{1}{3!}$. $\left(\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{3!}\right)$

Quando não é fácil (ou possível) determinar o desenvolvimento de Laurent em torno de um ponto, a seguinte proposição é de grande utilidade na classificação de singularidades isoladas.

Proposição 13.1 *Se f é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ para certo $\varepsilon > 0$, então*

1. *f tem um **zero de ordem** $\mathbf{m}$ em z_0 sse* $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
2. *f tem uma **singularidade removível** em z_0 sse* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
3. *f tem um **pólo de ordem** $\mathbf{m}$ em z_0 sse* $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{\mathbf{m}} f(z) \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Demonstração. 1. *Se f tem um **zero de ordem** $\mathbf{m}$ em z_0, então*

$$f(z) = \sum_{n=\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{\mathbf{m}} \sum_{n=\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-\mathbf{m}} = (z - z_0)^{\mathbf{m}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+\mathbf{m}} (z - z_0)^n,$$

pelo que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} = a_{\mathbf{m}} \neq 0$. *Reciprocamente se* $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, *então por hipótese a função definida por*

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} & \text{se} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon \\ \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} & \text{se} \quad z = z_0 \end{cases},$$

*é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ e contínua em z_0. Pelo Corolário **12.2** concluímos que $g(z)$ é analítica em todo o círculo $|z - z_0| < \varepsilon$. Então pelo Teorema de Taylor*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \quad e \quad g(z_0) = \tilde{a}_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \neq 0.$$

Portanto, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^{n+\mathbf{m}}$ *tem um zero de ordem $\mathbf{m}$ em z_0.*

2. *Se f tem uma **singularidade removível** em z_0, então $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, pelo que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$. Reciprocamente se $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$, então por hipótese a função definida por*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) & \text{se} \quad z = z_0 \end{cases},$$

*é analítica em $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ e contínua em z_0. Pelo Corolário **12.2** concluímos que $g(z)$ é analítica em todo o círculo $|z - z_0| < \varepsilon$. Então pelo Teorema de Taylor $f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.*

3. *Se f tem um **pólo de ordem** $\mathbf{m}$ em z_0, então*

$$f(z) = \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+\mathbf{m}} = \frac{1}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-\mathbf{m}} (z - z_0)^n$$

pelo que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z) = a_{-\mathbf{m}} \neq 0$. *Reciprocamente se* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, *então por hipótese a função definida por*

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z) & se \quad 0<|z-z_0|<\varepsilon \\ \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z) & se \quad z=z_0 \end{cases},$$

é analítica em $0<|z-z_0|<\varepsilon$ *e contínua em* z_0. *Pelo Corolário* ***12.2*** *concluímos que* $g(z)$ *é analítica em todo o círculo* $|z-z_0|<\varepsilon$. *Então pelo Teorema de Taylor*

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{a}_n(z-z_0)^n \quad e \quad g(z_0)=\tilde{a}_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z)\neq 0.$$

Portanto, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{a}_n(z-z_0)^{n-\mathbf{m}}$ *tem um pólo de ordem* $\mathbf{m}$ *em* z_0. ■

13.2 Classificação de singularidades isoladas

Por vezes, para obter enunciados mais sucintos para as propriedades de pólos e zeros de funções, são convenientes, de acordo com a proposição anterior, as seguintes convenções:

Definição 13.4 *Dado* $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}$, *positivo, negativo ou nulo e uma função analítica na região definida por* $0<|z-z_0|<\varepsilon$ *(i. e. numa vizinhança perfurada de* z_0*),*

1. f *tem um* ***zero de ordem*** $\mathbf{m}$ *sse* $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{\mathbf{m}}}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

2. f *tem um* ***pólo de ordem*** $\mathbf{m}$ *em* z_0 *sse* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{\mathbf{m}} f(z)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Portanto, de acordo com esta definição, $f(z)$ tem um zero de ordem $\mathbf{m}$ sse tem um pólo de ordem $-\mathbf{m}$. Em particular uma função tem um zero de **ordem zero** em z_0 (ou o que é o mesmo, um pólo de **ordem zero** em z_0) sse $f(z)$ é analítica numa vizinhança de z_0 e não se anula neste ponto (e portanto também não se anula numa vizinhança do ponto).

Como resultado imediato, mas importante do ponto de vista prático, temos a seguinte:

Proposição 13.2 *Se* $f(z)$ *tem um zero de ordem* $\mathbf{m}$ *em* z_0 *e* $g(z)$ *um zero de ordem* $\mathbf{n}$ *no mesmo ponto, então*

1. *A função* $f(z)\,g(z)$ *tem um zero de ordem* $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ *em* $z=z_0$.

2. *A função* $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ *tem*[2]*:*

---

[2]Se $g(z)$ (é analítica e) tem um zero de ordem finita $\mathbf{n}$ (i. e. não é identicamente nula) em z_0 então existe uma vizinhança de z_0 onde z_0 é o único zero de g. Pois neste caso $g_1(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{\mathbf{n}}}$ é uma função analítica que não se anula em z_0; por continuidade o mesmo acontece numa vizinhança deste ponto; então $g(z)=(z-z_0)^{\mathbf{n}} g_1(z)$ também não se anula numa vizinhança de z_0 (excluindo o ponto z_0).

(a) *um zero de ordem* $\mathbf{m}-\mathbf{n}$, *se* $\mathbf{m}>\mathbf{n}$.

(b) *uma singularidade removível, se* $\mathbf{m}\geqslant\mathbf{n}$.

(c) *um pólo de ordem* $\mathbf{n}-\mathbf{m}$, *se* $\mathbf{m}<\mathbf{n}$.

Exemplo 13.2 *Considere-se a função* $\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{(z-\pi)^9}$. *Como* $z=\pi$ *é um zero simples de* $\operatorname{sen} z$ *(porque* $\lim\limits_{z\to\pi}\frac{\operatorname{sen} z}{z-\pi}=-1$*), concluímos, de acordo com a proposição anterior, que* $\operatorname{sen}^2 z$ *tem um zero de segunda ordem e* $\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{(z-\pi)^9}$ *um pólo de ordem* 7 *no mesmo ponto.*

Proposição 13.3 *Se* $f(z)$ *tem um zero de ordem* $\mathbf{m}$ *em* z_1 *e* $g(z)$ *um zero de ordem* $\mathbf{n}>0$ *no ponto* z_0, *então* $f(z_1+g(z))$ *tem um zero de ordem* $\mathbf{mn}$ *em* $z=z_0$.

Demonstração. *Uma vez que* $\lim\limits_{z\to z_0}(z_1+g(z))=z_1$, *temos*

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_1+g(z))}{(z-z_0)^{\mathbf{mn}}} &= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{g(z)}{(z-z_0)^{\mathbf{n}}}\right)^{\mathbf{m}}\frac{f(z_1+g(z))}{(z_1+g(z)-z_1)^{\mathbf{m}}}\\ &= \left(\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{(z-z_0)^{\mathbf{n}}}\right)^{\mathbf{m}}\lim_{z\to z_1}\frac{f(z)}{(z-z_1)^{\mathbf{m}}}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\end{aligned}$$

■

Exemplo 13.3 *Considere-se a função* $\dfrac{\operatorname{sen} z^3}{\operatorname{sen}\left((\operatorname{sen} z^2)^3\right)}$. *Como* $z=0$ *é um zero simples de* $\operatorname{sen} z$, *concluímos, de acordo com a proposição anterior, que* $\operatorname{sen} z^3$ *tem um zero de terceira ordem e* $\operatorname{sen}\left((\operatorname{sen} z^2)^3\right)$ *tem um zero de sexta ordem no mesmo ponto. Portanto* $\dfrac{\operatorname{sen} z^3}{\operatorname{sen}\left((\operatorname{sen} z^2)^3\right)}$ *tem um pólo de terceira ordem em* $z=0$.

13.3 Cálculo de limites

Quer na classificação das singularidades isoladas quer na determinação do resíduos de pólos (como veremos mais à frente) é essencial calcular limites de funções analíticas, obtendo-se frequentemente indeterminações $\frac{0}{0}$. É pois importante saber lidar com estas situações. A próxima proposição dá-nos o resultado prático frequentemente usado na resolução de tais dificuldades. Pode ser visto como uma generalização da regra de Cauhy da análise real, contudo, embora agora se considerem funções de variável complexa, as condições impostas às funções são mais restrictivas: as funções têm de ser analíticas. As conclusões também são ligeiramente mais fortes: não é necessário, *a priori*, admitir a existência de um limite.

Proposição 13.4 *Sejam* f *e* g *não identicamente nulas e analíticas em* $|z-z_0|<\varepsilon$ *e tais que*

$$f(z_0)=g(z_0)=0.$$

Então (onde a não existência de um dos limites implica a não existência do outro[3]*)*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\qquad e\qquad \lim_{z\to z_0}\frac{\frac{1}{g(z)}}{\frac{1}{f(z)}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'}$$

Demonstração. Como f e g não são identicamente nulas e são analíticas numa vizinhança de z_0, estão bem definidas como números naturais as ordens dos zeros de f e g . Sejam então m a ordem do zero de f e n a ordem do zero de g; por hipótese m e n são inteiros positivos. Então existem funções f_1 e g_1 analíticas em $|z-z_0|<\varepsilon$ tais

$$f(z)=(z-z_0)^m f_1(z)\quad \text{e}\quad f_1(z_0)\neq 0,$$
$$g(z)=(z-z_0)^n g_1(z)\quad \text{e}\quad g_1(z_0)\neq 0.$$

Portanto

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}f_1(z)+(z-z_0)^m f_1'(z).$$

Daqui concluímos

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)(z-z_0)}{mf(z)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^m f_1(z)+(z-z_0)^{m+1}f_1'(z)}{m(z-z_0)^m f_1(z)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\left(1+\frac{(z-z_0)f_1'(z)}{mf_1(z)}\right)=1.\end{aligned}$$

Então, utilizando este resultado para a função f e para a função g,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{mf(z)}{f'(z)(z-z_0)}\frac{g'(z)(z-z_0)}{ng(z)}\frac{nf'(z)}{mg'(z)}=\frac{n}{m}\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

e

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\left(\frac{1}{g(z)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{g'(z)(z-z_0)}{ng(z)}}{\frac{f'(z)(z-z_0)}{mf(z)}}\frac{n}{m}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{n}{m}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{n}{m}\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{1}{g(z)}}{\frac{1}{f(z)}}.$$

Basta agora verificar que no caso $m>n$, sem perca de generalidade[4], se tem

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=0.$$

De facto, para $m>n$,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m f_1(z)}{(z-z_0)^n g_1(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{f_1(z)}{g_1(z)}=(z_0-z_0)^{m-n}\frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

■

[3] De facto, nestas condições, os limites em causa existem sempre em $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ (esfera de Riemann) verificando-se também a igualdade dos limites neste contexto generalizado, em que $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ significa por definição $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$.

[4] O caso $n>m$ reduz-se ao caso $m>n$ trocando os papeis de f e g. Isto é, se $n>m$, então vem $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\infty$, o que significa por definição $\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)}{g(z)}}=0$.