12 ª Aula 2006.03.22 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

12.1 Série de Laurent

Vamos agora generalizar o Teorema **11.4** considerando funções analíticas apenas em coroas circulares.

Teorema 12.1 (Série de Laurent) *Seja f uma função complexa de variável complexa, z_0 um número complexo e r um real não negativo e R um real ou $+\infty$ (tal que $r < R$). Se a função f é analítica no ânulo $\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, então para qualquer z neste ânulo temos* [1]

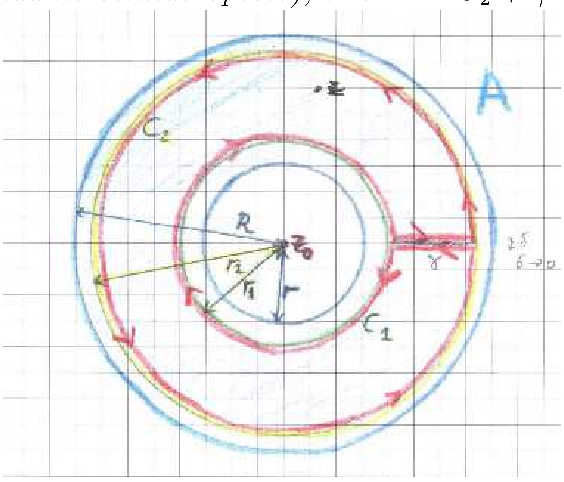
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

e C é uma (qualquer) curva simples, fechada e seccionalmente regular que envolve o ponto z_0 e está contida no ânulo $\mathbf{A}$.

Demonstração. *(Esta demonstração é semelhante à demonstração do Teorema **11.4**) Seja $z \in \mathbf{A}$, e r_1, r_2 dois reais positivos tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Considere-se as circunferências C_1, de centro em z_0 e raio r_1, e C_2, de centro em z_0 e raio r_2. Seja γ um segmento de recta que liga C_2 a C_1 nesta ordem. Finalmente considere-se a curva fechada Γ que é a concatenação de C_2 com γ, com $-C_1$ (curva C_1 percorrida no sentido negativo), com $-\gamma$ (curva γ percorrida no sentido oposto); i. e. $\Gamma = C_2 + \gamma - C_1 - \gamma$.*



[1]

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= .... + a_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + a_{-1} \frac{1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ... \end{aligned}$$

Pela fórmula integral de Cauchy obtemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \qquad (12.1) \\ &= \frac{1}{i2\pi} \left(\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \right) \end{aligned}$$

*Para $\xi \in C_2$, temos $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ e de acordo com os cálculos efectuados na demonstração do Teorema **11.4**, temos*

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

sendo a convergência uniforme em C_2. De modo semelhante, trocando os papeis de ξ e z temos: para $\xi \in C_1$,$|\xi - z_0| < |z - z_0|$ e de acordo com os cálculos efectuados anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{z - \xi} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}}. \end{aligned}$$

*sendo a convergência uniforme em C_1.Então de 12.1, e de acordo com o Teorema **11.1**, vem*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \left(\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} f(\xi) \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \, d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \, (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \, d\xi \, (z - z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

onde, para $n \geqslant 0$,

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

e

$$a_{-n} = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \, d\xi.$$

*Mas então, de acordo com o Corolário **8.4**, podemos escrever ,para $n \in \mathbb{Z}$,*

$$a_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_{C} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

onde C é qualquer curva simples, fechada e seccionalmente contínua que envolve o ponto z_0 e está contida no ânulo **A**. ■

Corolário 12.2 *Se f é contínua em z_0 e é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, para certo $\varepsilon > 0$, então é analítica em z_0.*

Demonstração. *Considere-se a demonstração anterior. Na presente situação temos $r = 0$ pelo que podemos tomar valores de r_1 (raio da circunferência C_1) tão próximos de 0 quanto desejarmos. Como f é contínua em z_0, existe r_1 tal que*

$$|\xi - z_0| < r_1 \Rightarrow |f(\xi) - f(z_0)| \leqslant 1.$$

Então, para $n \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \oint_{C_1} (\xi - z_0)^{n-1} f(\xi)\, d\xi \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} |\xi - z_0|^{n-1} |f(\xi)|\, |d\xi| = \frac{r_1^{n-1}}{2\pi} \oint_{C_1} |f(\xi)|\, |d\xi| \\ &\leqslant \frac{(|f(z_0)| + 1)\, r_1^{n-1}}{2\pi} \oint_{C_1} |d\xi| = (|f(z_0)| + 1)\, r_1^{n}. \end{aligned}$$

Fazendo r_1 tender para zero obtemos $a_{-n} = 0$. Donde pelo teorema anterior

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*se $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Mas como ambos os termos desta igualdade são funções contínuas em z_0, concluímos que a igualdade é verdadeira para todo z tal que $|z - z_0| < \varepsilon$. Pelo que a conclusão deste corolário sai do Teorema **11.3** que garante que qualquer série de potências (não negativas) é analítica no interior do seu circulo de convergência.* ■

Notação 12.1 *Nas condições do Teorema 12.1*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

o lado direito da igualdade designa-se por série de Laurent de $f(z)$ convergente no ânulo $r < |z - z_0| < R$. Esta é a soma de duas séries:

$$f(z) = g_s(z) + g_r(z)$$

onde

$$g_s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n$$

*é a **parte singular** da série (função analítica em $r < |z - z_0|$) e*

$$g_r(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*é a **parte regular** da série e representa uma função analítica no circulo $|z - z_0| < R$.*

Quando $r = 0$, dizemos que a série de Laurent correspondente é o desenvolvimento de f em torno de z_0.

12.2 Teorema dos resíduos

Note-se que nas condições do Teorema **12.1**

$$\oint_C f(z)\, dz = i2\pi a_{-1}.$$

Definição 12.2 *Se* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *para* z *tal que* $0 < |z-z_0| < r$ *(i. e. se* f *é analítica em* $0 < |z-z_0| < r$*) então* a_{-1} *é o* ***resíduo de*** f ***em*** z_0*:*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$$

Em particular, se $f(z)$ é analítica em z_0, então $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Exemplo 12.1 *Cálculo do resíduo de* $\frac{e^{z^4}}{z^9}$ *em* $z=0$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{z^4}}{z^9} &= \frac{1}{z^9}\left(1 + z^4 + \frac{1}{2!}z^8 + \frac{1}{3!}z^{12} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots \qquad , \end{aligned}$$

portanto

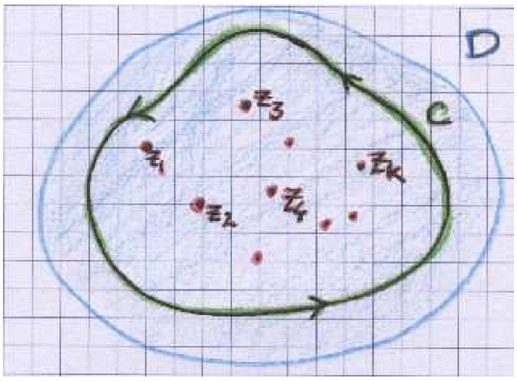
$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{z^4}}{z^9} = \frac{1}{2!}$$

Teorema 12.3 (dos Resíduos) *Seja:*

D um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$,

f analítica em $D\backslash\{z_1, z_2, z_{3,\ldots,}z_k\}$ (analítica em D excepto possivelmente num conjunto finito de pontos - com k elementos),

C uma curva fechada e simples (e seccionalmente regular) que envolve os pontos $z_1, z_2, z_{3,\ldots,}z_k$ no sentido positivo.

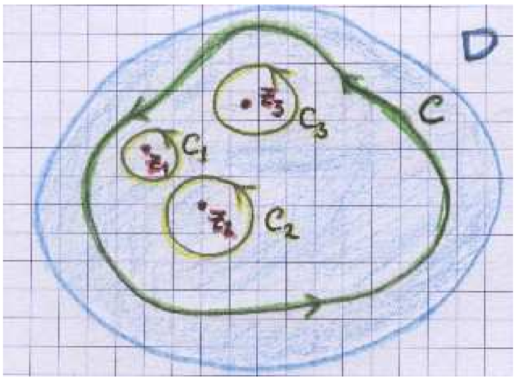


Então

$$\oint_C f(z)\, dz = i2\pi \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Demonstração. *Consequência imediata do Corolário **8.5** e do Teorema 12.1 Por exemplo para $k=3$*

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz \\ &= i2\pi \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + i2\pi \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + i2\pi \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z)\end{aligned}$$



■

Exemplo 12.2 *Este exemplo mostra bem a potência do Teorema dos Resíduos no cálculo de integrais.*

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^4}}{z^9}\,dz &= i2\pi \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{z^4}}{z^9} \\ &= i\pi,\end{aligned}$$

de acordo com o Exemplo 12.1.

Exemplo 12.3 *O Teorema dos Resíduos vem também sistematizar os resultados anteriores. Pelo Teorema dos Resíduos temos*

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-z^2}\,dz &= i2\pi\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z-z^2} + \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{z-z^2}\right) = i2\pi(1-1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde $\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z-z^2}$ *e* $\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{z-z^2}$ *podem ser calculados pela definição (são possíveis cálculos mais expeditos como poderemos ver mais à frente):*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z^2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\ldots\right) = \frac{1}{z}+1+z+\ldots \\ \frac{1}{z-z^2} &= \frac{-1}{z-1}\frac{1}{z} = \frac{-1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{-1}{z-1}\left(1-(z-1)+(z-1)^2-\ldots\right) \\ &= \frac{-1}{z-1}+1-(z-1)+\ldots\end{aligned}$$

*Mas outro cálculo seria possível sem aplicar o referido teorema, mas aplicando os resultados que lhe servem de base (Corolário **8.5** e fórmula integral de Cauchy):*

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-z^2}\,dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{1-z}}{z}\,dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z}}{1-z}\,dz = i2\pi - i2\pi = 0.$$

*Ou, neste caso muito particular, poderemos apenas usar o cálculo do Exemplo **8.6**:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-z^2}\,dz = \oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) dz = i2\pi - i2\pi = 0.$$

Exemplo 12.4 *Vamos calcular o integral*

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz,$$

onde a curva C é a elipse $|z+2\pi i| + |z| = 8$ percorrida no sentido positivo.
Comecemos por verificar que a função $\frac{1}{1-e^z}$ é analítica em todos os pontos excepto os pontos z tais que $e^z = 1$, portanto é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$. Como

$$|2\pi k i + 2\pi i| + |2\pi k i| < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi\left(|k+1| + |k|\right) < 8$$

$$\Leftrightarrow \quad |k+1| + |k| < \frac{4}{\pi} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = -1 \text{ ou } k = 0,$$

temos pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z} + \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} \right).$$

Falta agora calcular estes valores, $\operatorname*{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z}$ e $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z}$. Contudo, o desenvolvimento de Laurent da função $\dfrac{1}{1-e^z}$ em torno dos pontos $z = -2\pi i$ e $z = 0$, não é fácil de obter. Seria portanto vantajoso desenvolver um processo de cálculo destes resíduos sem passar pelo cálculo explícito da série de Laurent. Este será o assunto que trataremos a seguir. De facto, na próxima aula veremos que

$$\operatorname*{Res}_{z=-2\pi i} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z\to-2\pi i} \frac{z+2\pi i}{1-e^z} = \lim_{z\to-2\pi i} \frac{1}{-e^z} = -1$$

e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{1-e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{-e^z} = -1.$$

Donde

$$\oint_C \frac{1}{1-e^z} dz = -4\pi i.$$