11 ª Aula 2006.03.20 AMIV LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

11.1 Analiticidade das séries de potências

Vamos agora estudar alguns resultados gerais sobre séries de funções uniformemente convergentes que utilizaremos para mostrar que qualquer série de potências é um a função holomorfa (analítica). De facto, uma série de potências é uma série de funções da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$, com $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ pelo que poderemos aplicar os seguintes teoremas a estas séries.

Teorema 11.1 *Se C é uma curva seccionalmente regular, se $\int_C f_n(z)\, dz$ existe para todo n, se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em C e se $\int_C f(z)\, dz$ existe, então*

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z)\, dz$$

Demonstração. *Como a convergência é uniforme, dado uma aproximação $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que, para $N > N_0$,*

$$\forall z \in C \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z) + r_N(z), \qquad \text{com } |r_N(z)| < \varepsilon.$$

Usando a linearidade do integral, vem

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_C \sum_{n=0}^{N} f_n(z)\, dz + \int_C r_N(z)\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{N} \int_C f_n(z)\, dz + \int_C r_N(z)\, dz, \end{aligned}$$

donde

$$\left| \int_C f(z)\, dz - \sum_{n=0}^{N} \int_C f_n(z)\, dz \right| = \left| \int_C r_N(z)\, dz \right| < \int_C |r_N(z)|\, |dz| < \varepsilon \int_C |dz|.$$

Como $\int_C |dz|$ é o comprimento da curva C (que não depende de N nem de ε) e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \int_C f_n(z)\, dz$$

■

Teorema 11.2 *Se D é um conjunto aberto do plano complexo, se as funções $f_n(z)$ são analíticas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D, então*

$$f(z) \text{ é analítica em } D \quad e \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$$

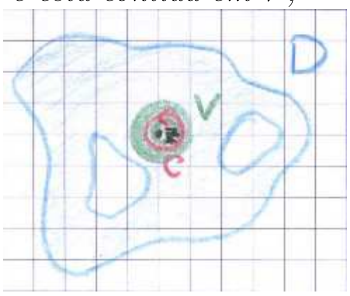
$(k \in \mathbb{N})$

Demonstração. *Primeiro mostra-se que $f(z)$ é contínua pelo argumento clássico $\delta/3$. (É a mesma demonstração da para o caso de funções reais de variável real. Se as funções $f_n(z)$ são contínuas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D, então $f(z)$ é contínua em D)*

*Considere-se um circulo $V \subset D$. Pelo Teorema **11.1**[1] e pelo Teorema de Cauchy (Teor. **8.2**) temos, para qualquer curva fechada em V,*

$$\oint f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \oint f_n(z)\, dz = 0.$$

*Então pelo Teorema de Morera (Teor. **9.4**) concluímos que f é analítica em V. Posto isto, dado $z \in D$, V um disco aberto que contém z e está contido em D, e C uma curva fechada que envolve z no sentido positivo e está contida em V,*



*vem pelas fórmulas integrais de Cauchy e pelo Teorema **11.1** que*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

■

Teorema 11.3 *Uma função definida por uma série de potências é analítica no interior da seu círculo de convergência. Nessa região a série pode ser derivada termo a termo.*

Demonstração. *Seja R o raio de convergência e z_0 o seu centro. Dado z tal que $|z - z_0| < R$, seja r tal que $|z - z_0| < r < R$. Pelo Teorema **10.2** a série é uniformemente convergente no círculo de raio r e centro em z_0, então pelo teorema anterior (Teor. 11.2) temos que a função é analítica nesse círculo, e portanto em z , e que podemos derivar a série termo a termo nesse ponto.* ■

[1]Os integrais existem porque tanto $f_n(z)$ como $f(z)$ são funções continuas.

11.2 Série de Taylor

Do teorema anterior concluímos que uma série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ...$$

convergente no interior do seu circulo de convergência $|z - z_0| < R$, onde R, o raio de convergência é calculado por

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pode ser derivada termo a termo. Obtemos então,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 (z - z_0) + 3a_3 (z - z_0)^2 ....$$

e $f'(z_0) = a_1$. Do mesmo modo, para a segunda derivada vem

$$\begin{aligned} f''(z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{(n-2)!} a_n (z - z_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (z - z_0) + 12a_4 (z - z_0)^2 .... \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{n!} a_{n+2} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

e $f''(z_0) = 2a_2$. Por indução concluímos

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k} \\ &= k! a_k + (k+1)! a_{k+1} (z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} (z - z_0)^2 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Fazendo $z = z_0$, obtemos $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, ou seja

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Vamos ver agora que qualquer função analítica é (localmente) uma série de potências.

Teorema 11.4 (Série de Taylor) *Seja f uma função complexa de variável complexa, z_0 um número complexo e r_0 um real positivo ou $+\infty$. Se a função f é analítica no circulo $|z - z_0| < r_0$, então para qualquer z neste circulo temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Demonstração. *Seja z tal que $|z-z_0|<r_0$ e r_1 tal que $|z-z_0|<r_1<r_0$. Pela fórmula integral de Cauchy vem*

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\oint_{|\xi-z_0|=r_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.$$

Para ξ tal que $|\xi-z_0|=r_1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi-z} &= \frac{1}{\xi-z_0+z_0-z}\\ &= \frac{1}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}\\ &= \frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

porque

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r_1}=r<1$$

Pelo critério de Weierstrass a série obtida é uniformemente convergente em $|\xi-z_0|=r_1$. Portanto (de acordo com o Teorema 11.1)

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{i2\pi}\oint_{|\xi-z_0|=r_1}f(\xi)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\\ &= \frac{1}{i2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\oint_{|\xi-z_0|=r_1}f(\xi)\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{i2\pi}\oint_{|\xi-z_0|=r_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\;(z-z_0)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\end{aligned}$$

onde se aplicaram as fórmulas integrais de Cauchy.

■

Percebemos agora porque é que a função $\dfrac{1}{1+x^2}$ que é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e função $\dfrac{1}{1+x}$ que não é limitada numa vizinhança do ponto -1, têm desenvolvimentos de Taylor de centro em 0 com o mesmo raio de convergência 1; no plano complexo tanto a função $\dfrac{1}{1+z^2}$, quer a função $\dfrac{1}{1+z}$ tem uma singularidade (ponto aonde a função não é analítica) à distancia de uma unidade do ponto 0 (a função $\dfrac{1}{1+z^2}$ tem singularidades nos pontos i e $-i$, e a função $\dfrac{1}{1+z}$ no ponto -1).

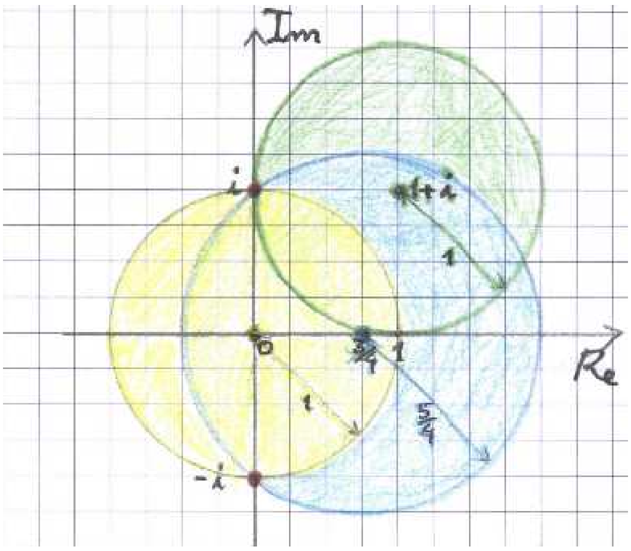
Exemplo 11.1 *A função* $\frac{1}{1+z^2}$ *é analítica em* $|z| < 1$ *e corresponde à série (porque se trata da série geométrica de razão* $-z^2$*)*

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n},$$

que é, portanto, a sua série de Taylor de centro em 0 *(ou série de Maclaurin). Se desconhecêssemos o valor da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = f(z)$*, poderíamos apenas afirmar que esta série definia uma função* $f(z)$ *com domínio* $|z| < 1$*. Contudo esta informação permitiria calcular todas as derivadas desta função no ponto* $z = \frac{3}{4}$*, por exemplo, e portanto calcular a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)}{n!} \left(z - \frac{3}{4}\right)^n.$$

Esta série tem como raio de convergência $\left|i - \frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4}$ *(porquê?). Poderíamos então definir de forma natural* $f(z)$ *como uma função analítica em* $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ ou } \left|z - \frac{3}{4}\right| < \frac{5}{4}\right\}$*. Poderíamos agora calcular a sua série de Taylor no ponto* $1 + i$*, por exemplo, e assim alargar de forma analítica o domínio de* $f(z)$ *aos pontos* $|z - (1+i)| < 1$*.*



Continuando este processo chegaríamos a uma função analítica definida em $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ *. Portanto mesmo sem saber a expressão elementar para a soma da série, poderíamos estender a função soma de forma analítica a um domínio maximal. A este processo chama-se* ***continuação analítica****.*

O conhecimento de desenvolvimentos em série de Taylor em torno do ponto $z_0 = 0$, designados por **séries de Maclaurin**, tem uma importância prática fundamental, pois servem de base ao cálculo de outras séries de Taylor.

Exemplo 11.2 *Vamos determinar o desenvolvimento da função* $\frac{1}{z^2}$ *em torno do ponto* $1+i$, *com base no conhecimento da série geométrica:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} \\
&= -\frac{d}{dz}\frac{1}{1+i+z-(1+i)} \\
&= -\frac{d}{dz}\frac{1}{(1+i)}\frac{1}{\left(1-\dfrac{1+i-z}{1+i}\right)} \\
&= \frac{-1}{1+i}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-\dfrac{1+i-z}{1+i}}
\end{aligned}$$

Para $|z-1-i|<\sqrt{2}$, *temos*

$$\frac{1}{1-\dfrac{1+i-z}{1+i}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+i-z}{1+i}\right)^n.$$

Pelo que, para valores de z *no círculo* $|z-1-i|<\sqrt{2}$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= \frac{-1}{1+i}\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+i-z}{1+i}\right)^n \\
&= \frac{-1}{1+i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-n\,(1+i-z)^{n-1}}{(1+i)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{(1+i)^{n+2}}\,(z-1-i)^n.
\end{aligned}$$